Rappels du cours Analyse Complexe

Note : $C(c, r)$ est le cercle de centre $c \in \mathbb{C}$ et de rayon r. Le chemin correspondant est ici toujours dans le sens trigonométrique.

TD1 - Différentiabilité complexe

— Rappel : $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-différentiable (diff.) en x si il existe $df_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linéaire telle que $f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(h)$.
— Dans ce cas f est $\mathbb{C}$-diff si df_x est en plus $\mathbb{C}-$linéaire ce qui est équivalent à dire que $df_x(h) = \lambda \times h$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
— Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-diff. ssi elle est dérivable au sens complexe : $(f(x+h) - f(x))/h$ admet une limite quand $h \to 0$; on dit qu'elle est holomorphe si elle est dérivable au sens complexe partout sur U.
— Définition du critère de Cauchy-Riemann : $\partial_x f = -i\partial_y f$ ou encore $df(i) = i \times df(1)$.
— f est $\mathbb{R}$-diff. et f vérifie Cauchy-Riemann $\Rightarrow$ f est holomorphe.
— $\partial_x f$ et $\partial_y f$ existent et sont continues et f vérifie Cauchy-Riemann $\Rightarrow$ f est holomorphe.

TD2 - Intégrale de chemin

— Définition chemin : application $[0, 1] \to \mathbb{C}$, continue. Rectifiable si C^1 par morceaux.
— Déf. intégrale de chemin rectifiable

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

si f est continue et γ est C^1. Sinon découper en morceaux sur lesquels γ est C^1.
— Moyen mnémotechnique : écrire $z = \gamma(t)$ et différencier : on obtient $dz = \gamma'(t)dt$ et continuer comme pour un chgt de variable standard.
— Définition longueur d'un chemin rectifiable $l(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt$.
— Inégalité ML : $|\int_\gamma f| \leq l(\gamma) \times \max_{\gamma([0,1])} |f|$.
— f possède une primitive sur U ouvert connexe ssi f est continue et $\forall \gamma$ rectifiable fermé de U, $\oint_\gamma f = 0$. Dans ce cas la primitive F vérifie $F(x) = F(a) + \int_\gamma f$ où γ est un chemin rectifiable quelconque qui relie a à x dans U.

TD3 - Connexité

— Définition (dilatation) : les dilatations de A sont les ensembles de la forme $\bigcup_{a \in A} D(a, r(a))$ avec $\forall a \in A, r(a) > 0$.
— Définition (connexe) : A est connexe (CNX) si toute dilatation de A est connexe par arcs (CPA).
— CPA equivaut à CNX pour un ouvert.
— CPA implique toujours CNX.

— f(CPA) est CPA si f est continue.
— Union de parties CNX (resp. CPA) avec intersection non vide est CNX (resp. CPA).
— L'adhérence d'un CNX est CNX.
— Une union disjointe d'ouverts n'est pas CPA.
— A est CNX ssi toute fonction loc-constante sur A est en fait constante.
— Une partie A quelconque peut être décomposée en ses composantes CNX (resp. CPA) ; il s'agit des sous-parties CNX de A (resp. CPA) qui sont maximales au sens de l'inclusion. Elles sont disjointes et forment une partition de A.
— De plus si A est ouvert, les décompositions CNX et CPA sont les mêmes, et les composantes sont également ouvertes.

TD4 - Cauchy local

— Définition (A ensemble étoilé) : existence d'un centre c tel que $a \in A \Rightarrow [c, a] \subset A$.
— Cauchy local : si f est holom. sur U ouvert étoilé, γ chemin fermé de U, alors $\oint_\gamma f = 0$.
— Cauchy intégral : si f est holom. sur U et $\overline{D}(c, r) \subset U$, alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(c,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

où le cercle $C(c, r)$ est orienté dans le sens trigo, pour $z \in D(c, r)$.
— Morera : f est holom. sur U ssi $\forall z \in U, \exists r > 0, \forall \gamma$ chemin fermé inclus dans $D(z, r)$, $\oint_\gamma f = 0$.
— Liouville : si f est entière (holom. sur $\mathbb{C}$) et bornée, f est constante.
— La limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe.

TD5 - Indice d'un chemin

— L'argument principal arg est défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (exemple : formule avec les arctan)
— La variation de l'argument sur un chemin γ $[\text{Arg}(z - a)]_\gamma$ est définie de manière inambigue si γ ne passe pas par a.
— Pour γ chemin fermé ne passant pas par un point a, on définit l'indice par $\text{ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi}[\text{Arg}(z - a)]_\gamma$ et c'est un nombre entier.
— $\text{ind}(\gamma, a)$ est loc-constant par rapport à γ et à a. Par conséquent, $\text{ind}(\gamma, \cdot)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$.
— Def : z point intérieur à γ si $\text{ind}(\gamma, z) \neq 0$.
— Def : z point extérieur à γ si $\text{ind}(\gamma, z) = 0$.
— U partie ouverte est dite simplement connexe si elle vérifie l'une des 3 propriétés suivantes qui sont équivalentes :

1. $\mathbb{C} \setminus U$ n'a pas de composantes connexes bornées (ou encore "U n'a pas de trous"),
2. $\forall \gamma$ chemin fermé inclus dans U, Int $\gamma \subset U$,
3. $\forall \gamma$ chemin fermé inclus dans U, $\mathbb{C} \setminus U \subset$ Ext γ.

— Pour un chemin γ fermé, une formule analytique de l'indice est : $\text{ind}(\gamma, a) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

TD6 - Cauchy global

— On peut étendre les définitions de l'indice (et donc de l'intérieur et de l'extérieur) et de l'intégrale de chemin pour des séquences de chemins fermés (rectifiables pour définir l'intégrale) avec une somme sur les termes de la séquence $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ...)$

- On considère dans la suite f holomorphe sur U ouvert, γ est une séquence de chemins fermés rectifiables inclus dans U.
- Cauchy global : si Int $\gamma \subset U$, alors $\oint_\gamma f = 0$
- Definition du résidu : si a est une singularité isolée de f, on pose

$$\mathrm{res}(f,a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(a,r)} f,$$

avec r tel que $D^*(a,r) \subset U$, et cette intégrale ne dépend pas de la valeur de r.
- Théorème des résidus : si Int $\gamma \subset U \cup A$ avec A fini (singularités isolées de f), alors

$$\oint_\gamma f = 2i\pi \sum_a \mathrm{res}(f,a)\mathrm{ind}(f,a)$$

- Formule de Cauchy : si Int $\gamma \subset U$, alors

$$\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a} = 2i\pi \times \mathrm{ind}(\gamma,a)f(a)$$

TD7 - Développements en séries entières / séries de Laurent

- $C(c,r_1,r_2)$ est la couronne de centre $c \in \mathbb{C}$ et de rayons r_1 et r_2.
- On considère ici f holomorphe sur un ouvert U :
- Si $D(c,r) \subset U$, alors f est DSE sur $D(c,r)$: $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-c)^n$ avec

$$a_n = f^{(n)}(c)/n! = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(c,r')} \frac{f(z)dz}{(z-c)^{n+1}},$$

avec $0 < r' < r$ et la convergence est normale sur tout compact inclus dans $D(c,r)$.
- Si $C(c,r_1,r_2) \subset U$, alors f est DSL sur $C(c,r_1,r_2)$: $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-c)^k$ avec

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(c,r)} \frac{f(z)dz}{(z-c)^{k+1}},$$

avec $r_1 < r < r_2$ et la convergence est normale sur tout compact inclus dans $C(c,r_1,r_2)$.

TD8 - Zéros et pôles - Les zéros des fonctions holomorphes

- On considère ici f holomorphe sur un ouvert U :
- Définition d'un zéro de multiplicité p ($p > 0$) ; les propositions sont équivalentes :
  1. $f(z) \sim \alpha(z-a)^p$ quand $z \to a$, avec $\alpha \neq 0$,
  2. $f(z) = g(z)(z-a)^p$ avec $g(a) \neq 0$, g holomorphe sur U,
  3. $f(a) = f'(a) = f^{(2)}(a) = ... = f^{(p-1)}(a) = 0$, $f^{(p)}(a) \neq 0$.
- Si U est connexe, les zéros de f sont de multiplicité finie, ou bien f est identiquement nulle.
- Si U est connexe, les zéros de f sont isolés, ou bien f est identiquement nulle.
- Principe d'unicité des fonctions holomorphes : si $f_1 = f_2$ sur un sous ensemble possédant un point d'accumulation dans U, et que U est connexe alors $f_1 = f_2$ partout.

TD8 suite - Zéros et pôles - Classification des singularités

- On considère ici f holomorphe sur U et s une singularité isolée :
- On a 3 cas possibles qui peuvent être caractérisés par plusieurs critères :
  1. s est effaçable si l'une des propriétés suivantes est vraie (elles sont équivalentes) :
     - f a une limite en s,
     - f est bornée au voisinage de s,
     - f est prolongeable sur $U \cup \{s\}$ et reste holomorphe,
     - il n'y a pas de termes d'ordre négatif dans le DSL de f en s.
  2. s est un pôle (d'ordre p) si l'une des propriétés suivantes est vraie (elles sont équivalentes) :
     - $f \sim \alpha/(z-s)^p$ avec p entier >0, $\alpha \neq 0$,
     - $|f| \to \infty$ quand $z \to s$,
     - dans le DSL de f en s il y a un nombre fini de termes d'ordre négatif, mais au moins un qui est non-nul.
  3. s est une singularité essentielle dans les autres cas ; cad si il y a un nombre infini de termes non-nuls d'ordre négatif dans le DSL de f en s.
- Calcul des résidus, quelques formules utiles :
  1. res(f,s)$=a_{-1}$: terme d'ordre -1 dans le DSL de f au voisinage de s.
  2. si $f(z) = g(z)/(z-s)^p$ avec g holomorphe sur $U \cup \{s\}$; $\text{res}(f,s) = \frac{g^{(p-1)}(s)}{(p-1)!}$.
  3. si $f(z) \sim a/(z-s)$ (pôle simple) avec $a \neq 0$, alors $\text{res}(f,s) = a$.
  4. si $f(z) = g(z)/h(z)$ avec g et h holomorphes sur U, $g(s) \neq 0$, $h(s) = 0$, $h'(s) \neq 0$, alors s pôle simple et $\text{res}(f,s) = g(s)/h'(s)$.