Atelier Révision

Exercice 1

Soit f une fonction holomorphe dans le disque $D(0,1)$. On appelle diamètre de f la quantité

$$d = \sup_{w,z \in D(0,1)} |f(z) - f(w)| \qquad \text{(qui peut être infinie)}$$

1. Démontrer que $2f'(0) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)-f(-w)}{w^2} dw$ pour tout $r \in]0,1[$.
2. En déduire que $2|f'(0)| \leq d$.

Exercice 2

Soit un polynôme p de $\mathbb{C}$ et γ un chemin rectifiable fermé contenant tous ses zéros dans son intérieur. Calculer :

$$\frac{1}{i2\pi} \int_\gamma z \frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

Exercice 3

Soit $\phi : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $C(0,1)$ le cercle unité parcouru dans le sens trigo. Montrer que :

$$\overline{\int_{C(0,1)} \phi(z) dz} = - \int_{C(0,1)} \overline{\phi(z)} \frac{dz}{z^2}$$

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant le disque fermé unité $\overline{D}(0,1)$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Calculer :

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0} dz \ , \ |z_0| \neq 1$$

Exercice 4

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{ln^2(t)}{1+t^2} dt$$

Exercice 5

Soient f, g deux fonctions entières vérifiant $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$