Corrections Atelier Révision

Correction Exercice 1

1. Avec formule de Cauchy dans disque, on a $i2\pi f'(0) = \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^2} dw$. Avec chgt variable $u = -w$, on a l'autre membre de la relation.
2. Avec inégalité M-L, on a $\left| \frac{1}{i2\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)-f(-w)}{w^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{d}{r^2} 2\pi r = \frac{d}{r}$ donc $2|f'(0)| \leq \frac{d}{r}, \forall r \in]0,1[$. On fait tendre r vers 1 et on obtient $2|f'(0)| \leq d$.

Correction Exercice 2

$p(z)$ est de la forme $(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2} \cdots (z-z_k)^{n_k}$. Donc $\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{z-z_i}$.
On a ainsi $\frac{1}{i2\pi} \int_\gamma z \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{z}{z-z_i} dz = \sum_{i=1}^{k} n_i \text{ind}(\gamma, z_i) z_i$ (d'après la formule de Cauchy).

Correction Exercice 3

$\overline{\int_{C(0,1)} \phi(z)dz} = \overline{\int_0^1 \phi(e^{i2\pi t}) i2\pi e^{i2\pi t} dt} = -\int_0^1 \overline{\phi(e^{i2\pi t})} \frac{2\pi e^{i2\pi t}}{(e^{i2\pi t})^2} dt = -\int_{C(0,1)} \overline{\phi(z)} \frac{dz}{z^2}$

$I = \int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(z)}}{z-z_0} dz = \int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(z)}}{z-z_0} z^2 \frac{dz}{z^2} = -\overline{\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{\overline{z}-\overline{z_0}} \overline{z}^2 dz}$ (d'après la relation trouvée précédemment).
On utilise la relation $z\overline{z} = 1$ pour trouver $I = \overline{\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z} dz} - \overline{\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z - \frac{1}{\overline{z_0}}} dz}$.
Avec la formule de Cauchy pour les disques : $I = \overline{f(0)}$ si $|z_0| < 1$ ou $I = \overline{f(0)} - \overline{f(\frac{1}{\overline{z_0}})}$ si $|z_0| > 1$.

Exercice 4

Avec $0 < r < 1 < R$, on choisit γ le chemin $[-R \to -r]$, puis le demi-cercle supérieur de rayon r dans le sens inverse trigo, puis $[r \to R]$ et enfin le demi-cercle supérieur de rayon R dans le sens trigo.
On choisit la détermination du log avec $\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ qui est holomorphe sur son domaine.
Soit $f(z) = \frac{log(z)}{1+z^2}$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^- \cup i)$.
i est un pôle simple de f donc $\text{res}(f,i) = \frac{\log^2(i)}{2i} = -\frac{\pi^2}{8i}$.
On applique le théorème des résidus qui donne $\int_\gamma f(z)dz = -\frac{\pi^3}{4}$.
$\int_{[r\to R]} f(z)dz = \int_r^R \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt \longrightarrow_{r\to 0, R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt$ (intégrale impropre convergente car $\ln(t) = o_0(t^{-\frac{1}{2}})$ et $\frac{\ln^2 t}{1+t^2} = o_{+\infty}(t^{-\frac{3}{2}})$).
$\int_{[-R\to -r]} f(z)dz \longrightarrow_{r\to 0, R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt + i2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt - \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ (même raisonnement que précédemment pour cv intégrales impropres).

On sait que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.
Sur le demi-cercle D_r de rayon r, on a $|\log(z)| \leq |\ln r| + \pi$, donc $\left|\int_{D_r} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{(|\ln r|+\pi)^2}{1-r^2} |ire^{i\theta}| d\theta = \pi r \frac{(|\ln r|+\pi)^2}{1-r^2} \longrightarrow_{r\to 0} 0$.
Idem sur le demi-cercle D_R, on a $\left|\int_{D_R} f(z)dz\right| \leq \pi R \frac{(|\ln R|+\pi)^2}{R^2-1} \longrightarrow_{R\to+\infty} 0$.
Au final, on trouve $I + I - \frac{\pi^3}{2} + i2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\frac{\pi^3}{4}$ donc $I = \frac{\pi^3}{8}$

Exercice 5

C'est clair si $f = 0$ ou $g = 0$. Soit a un zéro de g. $\mathbb{C}$ est un ouvert connexe donc a est de multiplicité $p > 1$ donc il existe une fonction g_1 telle que $g(z) = g_1(z)(z-a)^p$ avec $g_1(a) \neq 0$.
Or a est aussi un zéro de f donc il existe f_1 telle que $f(z) = f_1(z)(z-a)^q$ avec $f_1(a) \neq 0$ et $q > 1$.
$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq |g(z)|$ donc $q \geq p$.
Soit $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)}(z-a)^{q-p}$. On a $\lim_{z\to a} h(z) = 0$ si $q > p$ ou $\lim_{z\to a} h(z) = \frac{f(a)}{g(a)}$ si $q = p$ donc a est une singularité effaçable de h. Ceci étant vrai pour tous les zéros de g alors h est prolongeable en une fonctione holomorphe sur $\mathbb{C}$.
h est entière et $|h(z)| \leq 1$ donc d'après le théorème de Liouville, h est constante.