

Robots mobiles à roues

Sébastien Boisgérault - ISIA

8 avril 2004

1 Evolution d'un solide dans le plan.

1.1 Repérage d'un solide dans le plan. Matrices homogènes.

Repères fixes et mobiles.

Un objet est dit solide s'il ne subit pas de déformations au cours du temps : la position relative des différents points le constituant doit demeurer inchangée. Pour repérer les évolutions d'un tel objet, il suffit de connaître la configuration d'un repère mobile qui lui soit attaché.

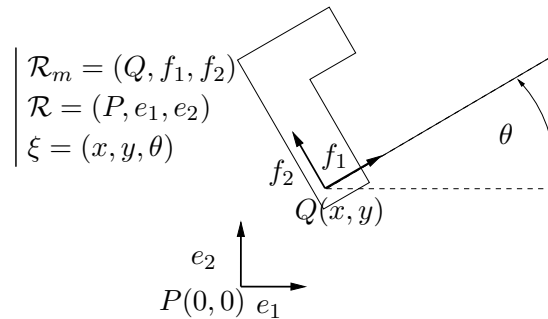


FIG. 1 – Repérage d'un solide dans le plan.

Notons $\mathcal{R} = (P, e_1, e_2)$ un repère fixe du plan et $\mathcal{R}_m = (Q, f_1, f_2)$ un repère mobile associé à un solide du plan. Les deux repères sont choisis orthonormés et directs. Le repère mobile peut être obtenu de façon unique comme image du repère fixe par une rotation d'angle θ , centrée en P , suivie d'une translation de vecteur u

$$Q = P + u, \quad f_1 = R(\theta)e_1, \quad f_2 = R(\theta)e_2 \quad (1)$$

Coordonnées cartésiennes.

Si l'on identifie tous les points et vecteurs à leurs coordonnées cartésiennes dans le repère (P, e_1, e_2) , donc en particulier en posant

$$P \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

l'opération de rotation $R(\theta)$ d'angle θ (centrée en P lorsqu'elle doit être appliquée non pas à des vecteurs mais à des points) se traduit par une (pré-)multiplication par la matrice

$$R(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

La translation/somme vectorielle de vecteur u de coordonnées (x, y) se traduit par l'addition du vecteur colonne

$$u \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4)$$

Coordonnées homogènes.

La gestion des opérations de translation et de rotation est considérablement simplifiée lorsque l'on introduit les concepts de matrices et de coordonnées homogènes. Considérons la transformation constituée d'une rotation d'angle θ centrée en P puis d'une translation de vecteur u . Posons $\xi = (x, y, \theta)$ et

$$\mathcal{H}(\xi) = \begin{bmatrix} R(\theta) & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Repérons ensuite les points du plan par leurs coordonnées homogènes : on associe à un point M , de coordonnées cartésiennes (a, b) dans (P, e_1, e_2) , le vecteur

$$M \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Image par une transformation. Considérons un point M du plan, identifié à ses coordonnées homogènes, et son image M' par une rotation d'angle θ centrée en P , puis par une translation de vecteur u . Alors, ses coordonnées homogènes sont données par

$$M' = \mathcal{H}(\xi)M \quad (7)$$

Changement de coordonnées. Si le repère \mathcal{R}_m est image du repère \mathcal{R} par une rotation d'angle θ suivie d'une translation de vecteur u , les coordonnées homogènes $M_{\mathcal{R}}$ d'un point M du plan dans le repère \mathcal{R} peuvent être déduites de ses coordonnées $M_{\mathcal{R}_m}$ dans le repère \mathcal{R}_m par la relation

$$M_{\mathcal{R}} = \mathcal{H}(\xi)M_{\mathcal{R}_m} \quad (8)$$

Notations et identités. Pour alléger les notations, on désignera $\mathcal{R}(\theta)$ la matrice homogène associée à une rotation pure d'angle θ , et $\mathcal{T}(u)$ la matrice homogène associée à une translation pure de vecteur u , c'est-à-dire

$$\mathcal{R}(\theta) = \mathcal{H}(\theta, 0) \text{ et } \mathcal{T}(u) = \mathcal{H}(0, u) \quad (9)$$

La dimension de l'argument évite tout risque de confusion ($\theta \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$ et $\xi \in \mathbb{R}^3$). On a alors les identités suivantes :

$$\mathcal{T}(u)\mathcal{R}(\theta) = \mathcal{H}(\xi), \quad \mathcal{R}(\theta)\mathcal{T}(u) = \mathcal{H}(\theta, R(\theta)u) \quad (10)$$

$$\mathcal{H}(\theta_1, u_1)\mathcal{H}(\theta_2, u_2) = \mathcal{H}(\theta_1 + \theta_2, R(\theta_1)u_2 + u_1) \quad (11)$$

$$\mathcal{R}(\theta)^{-1} = \mathcal{R}(-\theta), \quad \mathcal{T}(u)^{-1} = \mathcal{T}(-u) \quad (12)$$

$$\mathcal{H}(\theta, u)^{-1} = \mathcal{H}(-\theta, -R(-\theta)u) \quad (13)$$

$$\partial_\theta \mathcal{H}(\theta, u) \cdot \Delta\theta = (\Delta\theta) \begin{bmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

1.2 Cinématique des solides.

Structure du champ de vitesses. Lors du mouvement d'un solide dans le plan, à chaque instant le champ des vitesses des points du solide possède une structure bien particulière : le solide est soit en translation instantanée, soit en rotation instantanée. La vitesse \vec{v} du point X est respectivement de la forme

$$\vec{v} = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (X - A) \quad (15)$$

Dans le cas de la rotation instantanée, si la vitesse de rotation ω est non-nulle, il existe un unique point du plan de vitesse nulle : c'est le point A , appelé centre instantané de rotation (CIR) du solide.

Détermination du CIR. L'équation de droite de (15) montre qu'en tout point X , la vitesse est orthogonale à la droite (AX) . Par conséquent, en un point où la vitesse est non nulle, connaître la direction de la vitesse détermine l'axe auquel appartient le CIR. Connaître la direction de la vitesse en un second point en dehors de cet axe détermine entièrement la position du CIR.

CIR et translation instantanée. Dans le cas où le solide est en translation instantanée, la démarche précédente n'est pas valide puisque les deux droites considérées sont parallèles et distinctes ; elles sont donc sans point d'intersection, ce qui montre que l'on n'a pas affaire à une rotation instantanée. Les deux droites parallèles se croisent pourtant ... à l'infini ! Il est tentant d'introduire la notion de points à l'infini pour pouvoir continuer à manipuler les CIR sans avoir à distinguer le cas particulier des translations instantanées. C'est ce que permet de façon rigoureuse la théorie des coordonnées homogènes de la géométrie projective.

1.3 Coordonnées homogènes - Géométrie projective

En plongeant \mathbb{R}^2 dans un espace-quotient de \mathbb{R}^3 , on peut manipuler de la même façon vecteurs de \mathbb{R}^2 et (couples de) points à l'infini. Comme cela est présenté dans la section 1.1, on associe à un point du plan de coordonnées cartésiennes (x, y) le vecteur $\xi = (x, y, 1)$. A un couple de points à l'infini, diamétralement opposés, caractérisé par une direction $(u, v) \neq (0, 0)$, on associe le vecteur $\xi = (u, v, 0)$. Dans les deux cas, on associe ensuite au vecteur ξ l'ensemble $\{t\xi, t \in \mathbb{R}^*\}$.

$$\begin{array}{l}
\text{Point} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ t \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}^* \right\} \\
\text{Direction} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ t \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}^* \right\}
\end{array}$$

Application à la résolution de systèmes linéaires. L'utilisation de ces coordonnées augmentées permet une analyse simplifiée des systèmes d'équations linéaires non homogènes. On limitera la présentation aux systèmes d'équations à deux inconnues x et y bien que l'approche se généralise à un nombre quelconque de dimensions. La démarche consiste à associer à un système linéaire de la forme

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny + c_n = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

a priori non-homogène ($(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$), le système homogène suivant

$$\left| \begin{array}{l} a_1X + b_1Y + c_1Z = 0 \\ a_2X + b_2Y + c_2Z = 0 \\ \vdots \\ a_nX + b_nY + c_nZ = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

L'ensemble des triplets (X, Y, Z) solutions de ce système forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ; le triplet $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ est toujours solution. Cet ensemble est la réunion de trois sous-ensembles disjoints deux à deux

$$S = S_{\mathbb{R}} \cup S_{\infty} \cup \{(0, 0, 0)\} \quad (18)$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} S_{\mathbb{R}} = \{(X, Y, Z) \in S, Z \neq 0\} \\ S_{\infty} = \{(X, Y, Z) \in S, (X, Y) \neq (0, 0) \text{ et } Z = 0\} \end{array} \right. \quad (19)$$

A tout élément $(X, Y, Z) \in S_{\mathbb{R}}$ correspond une solution de (16)

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) \quad (20)$$

et inversement, toute solution classique non-nulle (x, y) de $S_{\mathbb{R}}$ engendre l'ensemble

$$\{(tx, ty, t), t \in \mathbb{R}^*\} \subset S_{\mathbb{R}} \quad (21)$$

Les triplets (X, Y, Z) de S_{∞} ne correspondent à aucune solution classique de (16). Par contre, pour tout $(X, Y, 0) \in S_{\infty}$ le couple $(x, y) = (X, Y)$ est solution de

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

Le couple (x, y) donne alors la direction (commune) des n droites associées au système (16). Enfin $(0, 0, 0)$ ne correspond à aucune solution, ni classique, ni généralisée.

2 Détermination des contraintes cinématiques.

Contrainte cinématique associée à une roue. Considérons une roue, fixe ou orientable, solidaire du châssis du robot et dont la position dans le repère mobile \mathcal{R}_m , lié au châssis, est déterminée par les valeurs l, α, β .

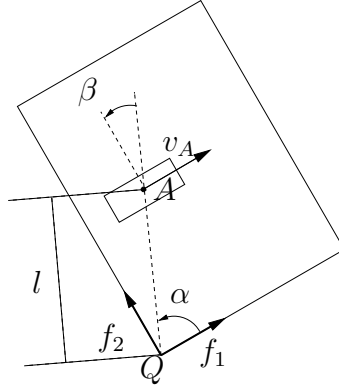


FIG. 2 – Paramètres repérant une roue dans le repère mobile $\mathcal{R}_m = (Q, f_1, f_2)$. Par convention $\dot{\phi} > 0$ correspondant à un vecteur vitesse v_A de même sens que $(-\cos(\theta + \alpha + \beta - \pi/2), -\sin(\theta + \alpha + \beta - \pi/2))$.

La position du repère mobile est déterminée dans le repère fixe \mathcal{R} par le vecteur $\xi = (x, y, \theta)$ conformément au schéma 1. Dans le repère fixe, les coordonnées (x_A, y_A) du point de contact A entre la roue et le sol sont directement reliées aux valeurs de θ, x , et y par la relation

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + R(\theta)R(\alpha) \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la vitesse du point A dans le repère fixe \mathcal{R} est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \dot{\theta}R\left(\theta + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Par ailleurs, si l'on suppose que la roue roule sans glisser, cette vitesse peut également se déduire de la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ de la roue considérée. Dans le repère fixe qui coïncide à l'instant courant avec \mathcal{R}_m , la vitesse v_A du point A est donnée par

$$v_A = R\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} r\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, dans le repère \mathcal{R} , on a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} = R\left(\theta + \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} r\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

La comparaison de (23) et (24) donne les deux relations scalaires

$$\begin{cases} [-\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta] \mathcal{R}^{-1}(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\phi} = 0 \\ [\cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta] \mathcal{R}^{-1}(\theta) \dot{\xi} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Synthèse des contraintes cinématiques Rassemblons les relations (25) correspondant aux $n = n_o + n_f$ roues que comporte le robot. Ces roues sont orientables ou fixes. On note $\beta = (\beta_o, \beta_f)$ le vecteur des orientations angulaires ; $\beta_o \in \mathbb{R}^{n_o}$ contient les angles relatifs aux roues orientables et $\beta_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ relatifs aux roues fixes. Notons ϕ le vecteur des angles de rotation des roues. On obtient deux relations de la forme

$$\boxed{C(\beta) \mathcal{R}(\theta)^{-1} \dot{\xi} = 0} \quad (26)$$

$$\boxed{J_1(\beta) \mathcal{R}(\theta)^{-1} \dot{\xi} + J_2 \dot{\phi} = 0} \quad (27)$$

avec

$$C(\beta) = \begin{bmatrix} C_o(\beta) \\ C_f(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \beta_1) & \sin(\alpha_1 + \beta_1) & l_1 \sin \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha_n + \beta_n) & \sin(\alpha_n + \beta_n) & l_n \sin \beta_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$J_1(\beta) = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1 + \beta_1) & \cos(\alpha_1 + \beta_1) & l_1 \cos \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin(\alpha_n + \beta_n) & \cos(\alpha_n + \beta_n) & l_n \cos \beta_n \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & r_n \end{bmatrix} \quad (30)$$

Notons que la matrice J_2 est inversible. Par conséquent, pour toute valeur de $\dot{\xi}$, il existe un unique $\dot{\phi}$ tel que (27) soit satisfaite. On dira donc qu'un vecteur $\dot{\xi}$ est **admissible** si et seulement si il satisfait la relation (26).

Indices et Type. Appelons

- **indice de mobilité** δ_m la dimension de l'espace vectoriel des $\dot{\xi}$ admissibles

$$\boxed{\delta_m = \dim \text{Ker } C(\beta) = 3 - \text{rang } C(\beta)} \quad (31)$$

- **indice d'orientabilité** δ_o le nombre de degrés de mobilité perdus par le fait des roues orientables

$$\boxed{\delta_o = \dim \text{Ker } C_f(\beta) - \dim \text{Ker } C(\beta) = \text{rang } C(\beta) - \text{rang } C_f(\beta)} \quad (32)$$

- **type** ou **classe** du robot le couple (δ_m, δ_o) .

La dénomination de ces indices s'expliquera lorsque nous aurons interprété la relation (26) d'un point de vue géométrique. Précisons dès maintenant que les membre de droites des équations de définition (31) et (32) ne sont pas toujours indépendants de β_o ! Par contre, ils sont constants pour *presque toute* valeur de β_o dans \mathbb{R}^{n_0} ce qui permet tout de même de définir les indices. Les configurations dans lesquelles les relations (31) et (32) ne sont pas respectées sont appelées **configurations singulières** ou simplement **singularités**.

Nous pourrions déjà tirer des conclusions partielles sur les types de robot réalisables et présentant une utilité. Nous attendrons pourtant de disposer de l'interprétation géométrique de l'équation (26) car elle simplifiera ce travail.

2.1 Analyse Géométrique de $C(\beta)$

Dans cette section, on établira la signification géométrique de l'équation (26). On utilisera cette interprétation pour analyser de façon plus générale le rang de $C(\beta)$.

CIR admissibles. Déterminons l'ensemble que peut décrire le CIR lorsque le robot est en mouvement. La direction de la vitesse est connue en chaque roue : le CIR est donc sur la droite passant par le centre de la roue i et orthogonale à celle-ci. Cette droite est orthogonale au vecteur $(-\sin(\alpha_i + \beta_i), \cos(\alpha_i + \beta_i))$ et passe par le point de coordonnées $(l \cos \alpha_i, l \sin \alpha_i)$. Par conséquent les coordonnées (a', b') du CIR vérifient

$$-\sin(\alpha_i + \beta_i)(a' - l \cos \alpha_i) + \cos(\alpha_i + \beta_i)(b' - l \sin \alpha_i) = 0$$

soit, puisque $\sin x \cos y - \sin y \cos x = \sin(x - y)$, en passant aux coordonnées homogènes (A', B', C')

$$-\sin(\alpha_i + \beta_i)A' + \cos(\alpha_i + \beta_i)B' + (l \sin \beta_i)C' = 0 \quad (33)$$

Notons $C^*(\beta)$ la matrice

$$C^*(\beta) = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1 + \beta_1) & \cos(\alpha_1 + \beta_1) & l_1 \sin \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin(\alpha_n + \beta_n) & \cos(\alpha_n + \beta_n) & l_n \sin \beta_n \end{bmatrix} \quad (34)$$

Alors l'ensemble des contraintes cinématiques du robot impose que les coordonnées homogènes (A', B', C') du CIR vérifient

$$C^*(\beta) \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

ou encore, dans le repère fixe \mathcal{R} , les coordonnées homogènes (A, B, C) du CIR sont

$$\boxed{C^*(\beta)\mathcal{H}(\xi)^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0} \quad (36)$$

Tout triplet satisfaisant cette équation détermine un CIR admissible vis-à-vis des contraintes cinématiques.

Relation entre $C^*(\beta)$ et $C(\beta)$. Un calcul direct montre la relation

$$\boxed{C(\beta) = C^*(\beta)\mathcal{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (37)$$

Par conséquent, le vecteur $\dot{\xi}$ sera solution de (26) si et seulement si il vérifie

$$\boxed{\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2}, u\right)\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}} \quad (38)$$

où (A, B, C) sont les coordonnées homogènes d'un CIR admissible. Si les coordonnées des CIR admissibles décrivent un espace linéaire de dimension p , les coordonnées cartésiennes des CIR admissibles décrivent un espace affine généralisé¹ de dimension $p - 1$. Par conséquent

- Notons d_{o+f} la dimension du sous-espace affine du plan que décrivent les CIR admissibles lorsque la configuration du robot (châssis et roues orientables) est fixée. Alors

$$\boxed{\delta_m = d_{o+f} + 1} \quad (39)$$

- Notons d_f la dimension du sous-espace affine du plan que décrivent les CIR admissibles à configuration fixée et en l'absence de roue orientable. Alors

$$\boxed{\delta_o = d_f - d_{o+f}} \quad (40)$$

Les CIR admissibles pouvant être trouvés sans calcul, de façon purement géométrique, la détermination du type d'un robot mobile à roue s'en trouve grandement simplifiée.

Types admissibles. Déterminons les valeurs que peuvent effectivement prendre le couple (δ_m, δ_o) .

INDICE DE MOBILITÉ. L'indice δ_m est un entier compris entre 0 et 3. S'il est nul, le seul vecteur $\dot{\xi}$ admissible en dehors des configurations singulières est le vecteur nul ; aucun mouvement n'est alors possible. On exclura de l'étude ce cas qui ne présente pas d'intérêt. A l'opposé, si $\delta_m = 3$, aucune roue, ni fixe ni orientable ne peut être présente. Ce degré de mobilité caractérise les robots **omnidirectionnels** ; ils sont conçus à partir de roues de nature différente, par exemple des *castor wheels* que l'on peut trouver sur les caddies de supermarché. Pour ces roues, l'axe de rotation de la roue orientable ne passe pas par le centre de la roue. On n'étudiera pas les caractéristiques de ces systèmes dans le cadre de ce document ; on se limitera donc aux seuls cas $\delta_m = 1$ ou $\delta_m = 2$.

INDICE D'ORIENTABILITÉ. Si l'indice de mobilité est égal à 1, le rang de $C(\beta)$ est donc égal à 2. L'indice d'orientabilité δ_o peut donc prendre la valeur 0, 1 ou 2. Si l'indice de mobilité vaut 2, le rang de $C(\beta)$ est égal à 1 et l'indice d'orientabilité peut prendre les valeurs 0 ou 1.

Tous ces couples ne correspondent toutefois pas à des robots mobiles dignes d'intérêt. L'interprétation des degrés de liberté en termes de CIR admissibles permet d'affiner l'analyse des types.

¹Un ensemble contenant un point à l'infini est par exemple assimilé à un espace affine de dimension 0.

On a $\delta_m = 1$ si la position du CIR est fixée. Cela peut être réalisé avec deux roues non coaxiales (ou plus de roues si elles sont coordonnées). Ce schéma n'a toutefois pas d'intérêt si les deux roues en question sont fixes : dans ce cas le robot sera perpétuellement en translation ou en rotation autour d'un point fixe. Cela nous conduit à exclure le robot $(1, 0)$ du cadre de l'étude. Reste donc les types $(1, 1)$ et $(1, 2)$ correspondant respectivement à une roue fixe et une roue orientable située en dehors de l'axe de la roue fixe, et à deux roues orientables.

On a $\delta_m = 2$ si le CIR peut, pour une configuration de robot donnée, décrire un espace de dimension 1. C'est le cas par exemple si le robot possède une roue fixe et aucune roue orientable ou bien deux (ou plus) roues fixes coaxiales. Le type associé est $(2, 0)$. Enfin, un robot peut ne comporter qu'une unique roue orientable. Il est alors du type $(2, 1)$.

3 Modèle de posture cinématique.

Le modèle cinématique d'un système mécanique est une synthèse de l'ensemble des contraintes cinématiques s'y rapportant. Dans le cas particulier d'un robot mobile à roues, ce système sera donc équivalent au couple d'équations (26) et (27). Par ces deux équations, les évolutions possibles du système sont décrites de façon implicite, comme solutions des équations. Au contraire, un modèle cinématique est explicite : il paramétrise l'ensemble des trajectoires possibles.

En toute rigueur, nous devrions donc déterminer quelles valeurs peuvent prendre les grandeurs $\dot{\xi}$, $\dot{\phi}$ et $\dot{\beta}_o$. Toutefois l'équation (27) détermine uniquement $\dot{\phi}$ en fonction de $\dot{\xi}$, θ et β ; autrement dit, la vitesse angulaire de chaque roue peut être déterminée de façon unique si l'on connaît les évolutions du châssis du véhicule ainsi que de ses roues orientables.

Nous pouvons donc exclure temporairement la variable $\dot{\phi}$ de l'étude. Nous déterminerons ainsi un modèle cinématique réduit appelé **modèle cinématique de posture**.

Inversion des contraintes cinématiques. Notons $\Sigma(\beta)$ une matrice de rang maximal dont les vecteurs colonnes forment, en dehors des singularités, une base du noyau de $C(\beta)$. C'est une matrice $3 \times \delta_m$ et par construction, on a l'équivalence

$$C(\beta)\mathcal{R}^T(\theta)\dot{\xi} = 0 \text{ si et seulement si } \exists \eta \in \mathbb{R}^{\delta_m}, \dot{\xi} = \mathcal{R}(\theta)\Sigma(\beta)\eta$$

Le modèle cinématique de posture est le système d'entrée (η, ζ) et d'état (ξ, β_o) défini par

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mathcal{R}(\theta)\Sigma(\beta)\eta \\ \dot{\beta}_o = \zeta \end{cases} \quad (41)$$

Il résume l'information concernant les contraintes cinématiques du système : pour toute commande $(\eta(t), \zeta(t))$ et toute condition initiale $(\xi(0), \beta_o(0))$, la solution $(\xi(t), \beta_o(t))$ du système (41) respecte l'ensemble des contraintes cinématiques. De plus, toutes les trajectoires admissibles peuvent être obtenues par cette méthode.

Le modèle cinématique de posture met une nouvelle fois en évidence la structure des degrés de liberté du système. En effet, la commande η n'agit en aucun cas sur les orientations des roues du robot, seulement sur les degrés de liberté restants, que nous avons appelé degrés de mobilité. Pour cette raison, la taille de η est égale à l'indice de mobilité δ_m . La commande ζ agit sur les orientations des roues que l'on peut orienter indépendamment ; sa taille est égale à l'indice d'orientabilité δ_o .

4 Modèle dynamique

4.1 Formulation de Lagrange.

Les systèmes mécaniques, en particulier les robots mobiles, font partie de la famille des systèmes d'Euler-Lagrange : les équations régissant leur dynamique peuvent être déterminées à partir d'une fonction scalaire L , appelée lagrangien du système. Notons $q \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des coordonnées généralisées qui repère la configuration du système et \dot{q} le vecteur vitesse généralisé. Le lagrangien est formé à partir de l'énergie cinétique $T(q, \dot{q})$ et de l'énergie potentielle $U(q)$

$$L = T - U \quad (42)$$

Notons $[L]_\psi$ la quantité

$$[L]_\psi = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\psi}} L - \nabla_{\psi} L = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} \right)^T \quad (43)$$

En l'absence de contraintes sur les vitesses, si les forces généralisées f s'exercent sur le système, son évolution est régie par la relation

$$\boxed{[L]_q = f} \quad (44)$$

Si des contraintes de la forme

$$C(q)\dot{q} = 0 \quad (45)$$

s'exercent, sans toutefois modifier le bilan énergétique du système, cela induit une force généralisée supplémentaire, combinaison linéaire des vecteurs colonnes composant $C^T(q)$; l'évolution est alors donnée par

$$\boxed{\begin{cases} [L]_q = f + C^T(q)\lambda \\ C(q)\dot{q} = 0 \end{cases}} \quad (46)$$

Le vecteur λ est appelé multiplicateur de Lagrange associée à la contrainte. Dans notre situation, les contraintes sont décrites par les relations (26) et (27). Il existe donc deux vecteurs λ et μ tels que

$$\begin{cases} [L]_\xi = \mathcal{R}(\theta)J_1^T(\beta)\lambda + \mathcal{R}(\theta)C^T(\beta)\mu \\ [L]_\phi = J_2^T(\beta)\lambda + \tau_\phi \\ [L]_{\beta_o} = \tau_o \end{cases} \quad (47)$$

où τ_ϕ et τ_o sont les vecteurs de couples contrôlant la rotation et l'orientation des roues. Posons

$$E(\beta) = -J_2^{-1} J_1(\beta) \quad (48)$$

Pour éliminer les multiplicateurs de Lagrange, on prémultiplie la première équation du système (53) par $\Sigma^T(\beta)R^T(\theta)$ et la seconde par $\Sigma^T(\beta)E^T(\beta)$. On obtient la relation

$$\Sigma^T(\beta)\mathcal{R}^T(\theta)[L]_\xi + \Sigma^T(\beta)E^T(\beta)[L]_\phi = \Sigma^T(\beta)E^T(\beta)\tau_\phi \quad (49)$$

L'énergie cinétique du système peut se mettre sous la forme

$$T = \frac{1}{2}\dot{\xi}^T \mathcal{R}(\theta)(M\mathcal{R}^T(\theta)\dot{\xi} + 2W\dot{\beta}_o) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^T I_\phi \dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\beta}_o^T I_o \dot{\beta}_o \quad (50)$$

Plutôt que de calculer dans le détail les équations de la dynamique qui en résulte, on va mettre en évidence la structure du système. En particulier, on va montrer que le modèle dynamique peut être vu comme une extension du modèle cinématique déjà étudié.

L'équation (27) permet d'exprimer $\dot{\phi}$ (et par conséquent les dérivées d'ordre supérieur) à partir des autres grandeurs du système.

$$\dot{\phi} = E(\beta)\mathcal{R}^T(\theta)\dot{\xi} \quad \text{et} \quad \ddot{\phi} = E(\beta)\mathcal{R}^T(\theta)\ddot{\xi} + \psi_1(\xi, \beta, \eta, \zeta) \quad (51)$$

L'utilisation du modèle cinématique (41) permet d'exprimer les grandeurs $\dot{\xi}$ et $\dot{\beta}_o$ en fonction de η et ζ . En dérivant ces relations, on obtient également

$$\ddot{\xi} = \mathcal{R}(\theta)\Sigma(\beta)\dot{\eta} + \psi_2(\xi, \beta, \eta, \zeta) \quad \text{et} \quad \ddot{\beta}_o = \dot{\zeta} \quad (52)$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} [L]_\xi &= \mathcal{R}(\theta)M\mathcal{R}^T(\theta)\ddot{\xi} + \mathcal{R}(\theta)W\ddot{\beta}_o + \psi_3(\xi, \beta, \eta, \zeta) \\ &= \mathcal{R}(\theta)M\Sigma(\beta)\dot{\eta} + \mathcal{R}(\theta)W\dot{\zeta} + \psi_4(\xi, \beta, \eta, \zeta) \\ [L]_\phi &= I_\phi \ddot{\phi} + \psi_5(\xi, \beta, \eta, \zeta) \\ &= I_\phi E(\beta)\Sigma(\beta)\dot{\eta} + \psi_6(\xi, \beta, \eta, \zeta) \\ [L]_{\beta_o} &= W^T \mathcal{R}^T(\theta)\ddot{\xi} + I_o \ddot{\beta}_o + \psi_7(\xi, \beta, \eta, \zeta) \\ &= W^T \Sigma(\beta)\dot{\eta} + I_o \dot{\zeta} + \psi_8(\xi, \beta, \eta, \zeta) \end{cases} \quad (53)$$

Les relations (49) et l'équation de la dynamique en β_o se combinent alors pour donner une relation de la forme

$$D(\beta) \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = F(\xi, \beta, \eta, \zeta) + G(\beta) \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_o \end{bmatrix} \quad (54)$$

avec

$$D(\beta) = \begin{bmatrix} \Sigma^T(\beta)(M + E^T(\beta)I_\phi E(\beta))\Sigma(\beta) & \Sigma^T(\beta)W \\ W^T \Sigma(\beta) & I_o \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$G(\beta) = \begin{bmatrix} \Sigma^T(\beta)E^T(\beta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (56)$$

4.2 Relation avec le modèle cinématique de posture.

Soit $G^\dagger(\beta)$ une matrice inverse à droite de $G(\beta)$

$$G(\beta)G^\dagger(\beta) = I \quad (57)$$

Introduisons le feedback auxiliaire u , relié au vecteur des couples $\tau = (\tau_\phi, \tau_o)^T$ par la relation

$$\tau = G^\dagger(\beta)(D(\beta)u - F(\xi, \beta, \eta, \zeta)) \quad (58)$$

L'équation (54) devient alors

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = u \quad (59)$$

Le modèle dynamique complet s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mathcal{R}(\theta)\Sigma(\beta)\eta \\ \dot{\beta}_o = \zeta \\ \dot{\eta} = u_1 \\ \dot{\zeta} = u_2 \end{cases} \quad (60)$$

5 Linéarisation par feedback

5.1 Généralités

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (61)$$

La commande d'un tel système *a priori* non linéaire est en générale difficile. Si l'on peut, en opérant un changement de variable et en introduisant un feedback auxiliaire, c'est-à-dire en posant

$$\begin{cases} y = \psi(x) \\ u = \kappa(x, \nu) \end{cases}, \quad \psi \text{ inversible} \quad (62)$$

rendre la dynamique de y linéaire et commandable

$$\dot{y} = Ay + B\nu, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \nu \in \mathbb{R}^m \quad (63)$$

L'élaboration de commandes réalisant des objectifs variés est considérablement facilitée. On dit alors que le système (61) est linéarisable par feedback statique. Si une telle transformation existe, quitte à introduire un nouveau changement de variable et une nouvelle commande auxiliaire, on peut mettre la dynamique sous la forme dite de de Brunovsky

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \dots, \dot{y}_{n_1} = \nu_1 \\ \dot{y}_{n_1+1} = y_{n_1+2}, \dots, \dot{y}_{n_1+n_2} = \nu_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} = y_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, \dot{y}_n = \nu_m \end{cases} \quad (64)$$

Lorsque la transformation considérée n'a permis de linéariser qu'une portion de la dynamique, on parle de linéarisation partielle. Enfin, lorsque le feedback et le changement de variables impliqués dans la transformation sont de la forme

$$\begin{cases} y = \psi(x, \chi) \\ u = \kappa(x, \chi, \nu) \\ \dot{\chi} = g(x, \chi, \nu) \end{cases}, \quad \psi \text{ inversible} \quad (65)$$

on parle de linéarisation par feedback dynamique.

5.2 L'exemple du robot (2, 0).

Détermination du modèle cinématique. Considérons le repère mobile \mathcal{R}_m représenté sur la figure 3. Avec le choix de ce repère, les positions et orientations de ces roues fixes sont caractérisées par $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\beta_1 = \beta_2 = 0$. La matrice des contraintes $C(\beta)$ associée est donnée par

$$C(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

et une matrice $\Sigma(\beta)$ admissible est donc

$$\Sigma(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

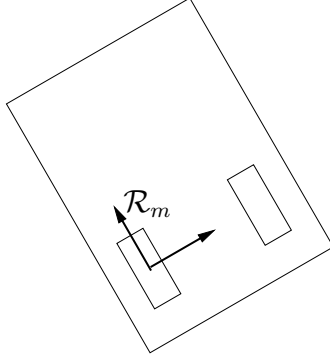


FIG. 3 – Robot de type $(2, 0)$. Choix du repère mobile.

En l'absence de roues orientables, le modèle cinématique de posture se réduit à $\dot{\xi} = \mathcal{R}(\theta)\Sigma(\beta)\eta$, la commande η étant de dimension 2. Cela se traduit explicitement par le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} &= -(\sin \theta)\eta_1 \\ \dot{y} &= (\cos \theta)\eta_1 \\ \dot{\theta} &= \eta_2 \end{cases} \quad (68)$$

La composante η_1 de l'entrée correspond donc à la vitesse (algébrique) du point (x, y) et la composante η_2 est la vitesse angulaire du robot.

5.2.1 Point Tracking et linéarisation par feedback statique.

Commande assurant le Point Tracking. Dans cette section, on souhaite concevoir une loi de commande telle qu'un point A solidaire du châssis rejoigne asymptotiquement une trajectoire de référence prédéterminée.

Il est possible réperer ce point A dans le repère \mathcal{R}_m par sa distance e à l'origine P du repère et l'angle α qu'il fait avec l'axe des abscisses. Dans le repère fixe, le vecteur $h = (h_1, h_2)$ des coordonnées de ce point satisfait

$$h(\xi) = \begin{bmatrix} x + e \cos(\theta + \alpha) \\ y + e \sin(\theta + \alpha) \end{bmatrix} \quad (69)$$

La dérivée temporelle de ce vecteur est donnée par

$$\dot{h}(\xi) = \begin{bmatrix} -(\sin \theta)\eta_1 - e \sin(\theta + \alpha)\eta_2 \\ +(\cos \theta)\eta_1 + e \cos(\theta + \alpha)\eta_2 \end{bmatrix} \quad (70)$$

ce qui se met sous la forme

$$\dot{h}(\xi) = K(\xi)\eta, \text{ avec } K(\xi) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -e \sin(\theta + \alpha) \\ +\cos \theta & +e \cos(\theta + \alpha) \end{bmatrix} \quad (71)$$

Comme $\det K(\xi) = e \sin \alpha$, la matrice $K(\xi)$, appelée matrice de découplage, est inversible lorsque le point A n'est pas situé sur l'axe des roues. L'introduction

d'un contrôle auxiliaire ν , défini par

$$\eta = [K(\xi)]^{-1}\nu = \frac{1}{e \sin \alpha} \begin{bmatrix} +e \cos(\theta + \alpha) & +e \sin(\theta + \alpha) \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

permet de linéariser la dynamique de h

$$\dot{h}(\xi) = \nu \quad (73)$$

Si l'on souhaite que le point A suive la trajectoire $h_r(t)$, il suffit de choisir la loi de commande $\nu = \dot{h}_r - \lambda(h - h_r)$, $\lambda > 0$, pour que l'erreur de suivi $e = h - h_r$ ait pour dynamique

$$\dot{e} + \lambda e = 0 \quad (74)$$

et converge donc exponentiellement vers 0. Le problème du *point tracking* est donc satisfait lorsque le point de référence n'appartient pas à l'axe commun aux roues fixes.

Interprétation en termes de commande linéarisante. Le vecteur $h(\xi)$ n'ayant que deux composantes $h_1(\xi)$ et $h_2(\xi)$, contre 3 pour ξ , le passage de ξ à $h(\xi)$ ne constitue pas un changement de variable, par défaut d'inversibilité. Par contre, on vérifiera facilement que le passage de ξ à y , défini par

$$y(\xi) = \begin{bmatrix} h_1(\xi) \\ h_2(\xi) \\ \theta \end{bmatrix} \quad (75)$$

constitue un changement de variable admissible. Quelques calculs élémentaires montre qu'en posant

$$f(\theta, \nu) = -\frac{1}{e \sin \alpha} ((\cos \theta)\nu_1 + (\sin \theta)\nu_2) \quad (76)$$

la dynamique de y se met sous la forme

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ f(y_3, \nu) \end{bmatrix} \quad (77)$$

La recherche d'une solution au problème de *point tracking* est donc passée par la linéarisation partielle de la dynamique du système par un feedback statique. Ce que l'on voit clairement lorsque la dynamique du système est mise sous la forme (77), c'est que l'on peut choisir une trajectoire arbitraire h_r pour le point A et que θ suit alors une trajectoire θ_r , déterminée de façon unique. Par contre s'il est facile d'assurer la convergence de l'erreur $e = h - h_r$ vers 0, rien ne garantit que le θ correspondant rejoigne asymptotiquement θ_r : nous avons réalisé le *point tracking*, mais pas le *posture tracking*.

5.2.2 Posture Tracking et linéarisation par feedback dynamique.

Commande assurant le Point Tracking dans le cas singulier. Revenons sur la recherche de commande réalisant le *point tracking* lorsque le point A est choisi

sur l'axe des roues, c'est-à-dire lorsque la matrice de découplage est singulière. On peut toujours supposer que $\alpha = 0$, quitte à prendre e négatif. La dynamique de h est alors déterminée par

$$\dot{h}(\xi) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ +\cos \theta \end{bmatrix} (\eta_1 + e\eta_2) \quad (78)$$

Supposons désormais que le terme $\chi = \eta_1 + e\eta_2$, qui n'est autre que la vitesse algébrique du point A dans la direction $(-\sin \theta, \cos \theta)^T$, soit l'intégrale d'une entrée auxiliaire u

$$\dot{\chi} = u \quad (79)$$

Alors on a

$$\ddot{h}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & +\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\chi\eta_2 \\ u \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} -\chi\eta_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (80)$$

Par conséquent, si l'on pose $\nu = R(\theta)(-\chi\eta_2, u)^T$ on a bien linéarisé la dynamique de h puisque

$$\ddot{h} = \nu \quad (81)$$

Peut-on effectivement choisir une commande en η qui assure cette relation? Si $\chi \neq 0$ (par exemple si $\chi > 0$, ce que l'on supposera dans la suite), on peut déterminer η_2 et u de façon unique à partir de ν . De là, on peut revenir à une loi de commande en η par le schéma par blocs suivant

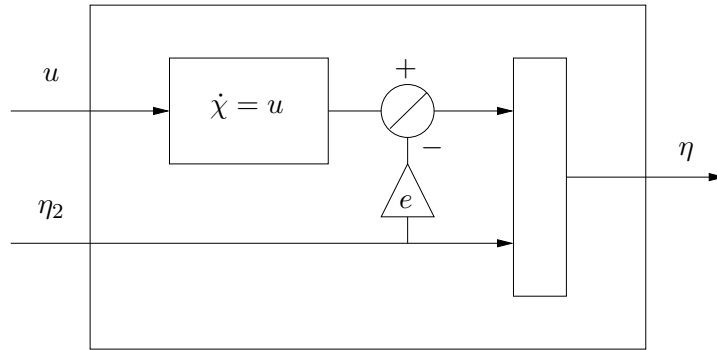


FIG. 4 – Calcul effectif de η en fonction de (u, η_2) .

Par ailleurs, il est facile de trouver une loi de commande en ν qui résolve le problème de *point tracking* : par exemple $\nu = \ddot{h}_r - k_1(\dot{h} - \dot{h}_r) - k_2(h - h_r)$ avec k_1 et k_2 convenablement choisis.

Linéarisation par feedback dynamique. Implicitement, nous avons dans la section précédente linéarisé le système (68) par un feedback dynamique. Pour mettre cela en évidence, déterminons les fonctions κ et g intervenant dans la forme (65) et le changement de variable associé. Quelques calculs montrent que nous avons implicitement posé

$$\begin{cases} \eta = \kappa(\xi, \chi, \nu) \\ \dot{\chi} = g(\xi, \chi, \nu) \end{cases} \quad (82)$$

avec

$$\kappa(\xi, \chi, \nu) = \begin{bmatrix} \chi + \frac{e}{\chi}(\cos \theta \nu_1 - \sin \theta \nu_2) \\ \frac{1}{\chi}(-\cos \theta \nu_1 + \sin \theta \nu_2) \end{bmatrix} \text{ et } g(\xi, \chi, \nu) = -\sin \theta \nu_1 + \cos \theta \nu_2 \quad (83)$$

Le changement de variable a consisté bien sur à poser $y = (h, \dot{h})$ puisque la dynamique en $y = (y_1, y_2)$ s'écrit

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \nu \end{cases} \quad (84)$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un changement de variable admissible. Les vecteurs h et \dot{h} peuvent être calculés de façon unique à partir de la donnée de ξ et de χ . La réciproque est-elle vraie ?

Remarquons tout d'abord que la variable $\chi(t)$ étant continue, pour éviter la singularité $\chi(t) = 0$, il est nécessaire que le signe de $\chi(t)$ soit constant pour tout t . Connaissant le signe de $\chi(0)$, on connaît donc le signe de χ . De l'égalité

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ +\cos \theta \end{bmatrix} \chi \quad (85)$$

on détermine alors de façon unique θ (à 2π près). En effet, on a

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \text{sgn}(\chi) \frac{(\dot{h}_2, -\dot{h}_1)}{\|\dot{h}\|} \quad (86)$$

On peut alors déterminer χ de façon unique et de là remonter aux valeurs de x et y par les relations

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - e \cos \theta \\ h_2 - e \sin \theta \end{bmatrix} \quad (87)$$

De plus, dans les deux sens, ce changement de variable est différentiable à tout ordre²

Posture Tracking. la linéarisation par feedback dynamique vue dans le paragraphe précédent permet d'assurer la *posture tracking* de toute trajectoire admissible³ pour laquelle la vitesse du point A reste supérieure à un seuil strictement positif.

Il suffit pour cela de poser $\nu = \ddot{h}_r - k_1(\dot{h} - \dot{h}_r) - k_2(h - h_r)$ avec des choix de k_1 et k_2 rendant exponentiellement stable la dynamique de l'erreur $e = h - h_r$, donnée par

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0 \quad (89)$$

²En d'autres termes, si C désigne le cercle unité, l'application

$$\psi : \mathbb{R}^2 \times C \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^*, \quad \psi(\xi, \chi) \mapsto (h, \dot{h}) \quad (88)$$

est un C^∞ difféomorphisme.

³On utilise le terme trajectoire admissible pour signifier qu'il s'agit d'une trajectoire que le robot peut effectivement emprunter : il existe une commande $\eta(t)$ qui génère cette trajectoire. On rappelle que toutes les trajectoires $(x(t), y(t), \theta(t))$ ne sont pas admissibles puisque la dynamique de $\theta(t)$ se déduit de celle de $x(t)$ et $y(t)$.

On a alors $\|(e(t), \dot{e}(t))\| \leq K \exp(-\sigma t)$ pour des $K > 0$ et $\sigma > 0$ et donc si a aucun moment on ne passe dans la configuration singulière $|\chi| = \|\dot{h}\| = 0$

$$\|(\xi - \xi_r, \chi - \chi_r)\| \leq \left[\sup_{\|\dot{h}\| > \varepsilon} \left\| \frac{\partial \psi^{-1}(h, \dot{h})}{\partial (h, \dot{h})} \right\| \right] \|(h - h_r, \dot{h} - \dot{h}_r)\| \quad (90)$$

on obtient également une décroissance exponentielle de l'erreur $\xi - \xi_r$.