

Introduction aux systèmes à temps discret

S. Boisgérault, ISIA

October 16, 2002

1 Représentation externe

1.1 Signaux à temps discret

Signal à temps discret. Transformée en z . Un signal à temps discret est essentiellement une suite de valeurs x_n , scalaires ou vectorielles, indexées par l'entier relatif $n \in \mathbb{Z}$. Le signal est noté $\{x_n\}$ ou parfois simplement x_n . Pour décrire intégralement le signal discret, il est également nécessaire de préciser l'intervalle de temps T séparant deux valeurs consécutives. Cette information sera indispensable lorsque nous devrons faire coexister signaux et systèmes à temps continu et à temps discret, mais ne sera pas utilisée avant la section 3.

La transformée en z d'un tel signal $\{x_n\}$ est donnée par la relation

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Quand cela est nécessaire, on note \mathfrak{Z} l'opérateur qui associe à la suite $\{x_n\}$ la fonction X

$$\mathfrak{Z} : \{x_n\} \mapsto X \quad (2)$$

Domaine de définition. La transformée en z d'un signal discret $\{x_n\}$ est définie sur un ensemble en forme de couronne : si les valeurs $X(z_1)$ et $X(z_2)$ sont définies, $X(z)$ est également définie pour tout z vérifiant

$$|z_1| \leq |z| \leq |z_2| \quad (3)$$

Si $\{x_n\}$ est un signal causal, c'est-à-dire si $x_n = 0$ pour tout $n < 0$, cette couronne est non bornée et donc de la forme

$$B(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\} \quad \text{ou} \quad \bar{B}(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \geq r\} \quad (4)$$

EXEMPLE. La suite de Dirac ou impulsion est le signal discret $\{\delta_n\}$ défini par

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

Sa transformée en z est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et vaut

$$\Delta(z) = 1 \quad (6)$$

En temps discret, l'échelon est le signal $\{e_n\}$ défini par

$$e_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

Sa transformée en z est définie pour tout $|z| > 1$; en effet, si z vérifie cette condition, $E(z)$ est la somme d'une série géométrique de raison $q = z^{-1}$ dont le module $|q|$ est strictement inférieur à 1

$$E(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (8)$$

Propriétés principales. Table de transformées. La transformée en z est une opération linéaire. De plus, l'effet d'un retard ou d'une avance sur un signal a un effet très simple sur la transformée en z du signal :

$$\text{si } \{y_n\} = \{x_{n+p}\} \text{ alors } Y(z) = z^p X(z) \quad (9)$$

Ces deux propriétés suffisent à déterminer la transformée en z de nombreux signaux par un démarche illustrée dans l'exemple suivant

EXEMPLE. Considérons le signal causal $\{x_n\}$ défini par

$$x_n = (-1)^n e_n \quad (10)$$

Pour tout $n \geq 0$, on a $x_{n+1} = -x_n$ et cette relation est également vérifiée pour $n \leq -2$. Comme $x_{-1} = 0$ et $x_0 = 1$, pour $n = -1$, on a $x_{n+1} = x_n + 1$. Au final, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$x_{n+1} + x_n = \delta_{n+1} \quad (11)$$

En passant à la transformée en z , on obtient donc $(z + 1)X(z) = z \times 1$, soit

$$X(z) = \frac{z}{z + 1} \quad (12)$$

△

Un raisonnement analogue permet de construire la table suivante.

Signal temporel $\{x_n\}$	Transformée en z $X(z)$
$q^n e_n$	$\frac{z}{z - q}$
$q^n \sin(\omega n) e_n$	$\frac{(\sin \omega)z}{q^2 - 2 \cos(\omega)qz + z^2}$
$q^n \cos(\omega n) e_n$	$\frac{z^2 - (\cos \omega)z}{q^2 - 2 \cos(\omega)qz + z^2}$

Figure 1: Table compacte de transformées en z .

Autres propriétés. La transformation en z possède des propriétés analogues à la transformation de Laplace. On pourra en particulier retenir

- **le théorème de la valeur finale :** si le signal causal $\{x_n\}$ est à variation bornée¹, alors $x_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ existe et

$$x_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (14)$$

- **Le théorème de la valeur initiale :** tout signal à temps discret causal $\{x_n\}$ admettant une transformée en z vérifie

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) \quad (15)$$

1.2 Systèmes à temps discret

Systèmes linéaires invariants par le temps. Un système à temps discret est une application qui fait correspondre à un signal d'entrée $\{u_n\}$ un signal de sortie $\{y_n\}$.

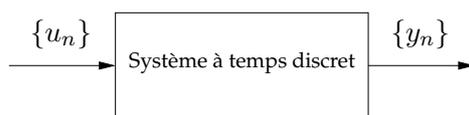


Figure 2: Schéma-bloc d'un système d'entrée $\{u_n\}$ et de sortie $\{y_n\}$.

La transformée en z est un outil adapté à l'étude des systèmes à temps discret **linéaires et invariants par le temps**. Le système est linéaire si l'application qui le définit est linéaire ; il est invariant par le temps si l'application d'un retard ou d'une avance sur le signal d'entrée produit le même retard ou la même avance sur la sortie.

De tels systèmes sont régis par des opérateurs de convolution discrète :

Propriété 1 Notons $\{h_n\}$ la réponse impulsionnelle d'un système à temps discret linéaire et invariant par le temps, c'est-à-dire le signal de sortie associé à l'entrée $\{u_n\} = \{\delta_n\}$. Alors, pour toute entrée $\{u_n\}$ de support fini², on a

$$y_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_{n-p} u_p = \{h_n\} * \{u_n\} \quad (16)$$

Démonstration – Pour tout signal de support fini $\{u_n\}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, la sortie associée au signal d'entrée $\{u_p \delta_{n-p}\}$ est $\{u_p h_{n-p}\}$. Par conséquent, comme on peut écrire l'entrée $\{u_n\}$ sous la forme

$$u_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} u_p \delta_{n-p}$$

¹c'est-à-dire si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| < +\infty \quad (13)$$

²c'est-à-dire telle que $u_n = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n ; cette restriction peut être levée si l'on fait les hypothèses de continuité ad hoc sur l'opérateur qui définit le système.

la sortie associée prend la forme (16). ■

On se convaincra aisément que tout système décrit par une relation de convolution de la forme (16) est linéaire et invariant par le temps ; cette classe de systèmes se confond donc exactement avec les opérateurs de convolution.

Une sous-classe très importante d'opérateurs pouvant être décrits par une convolution est l'ensemble des systèmes régis par des équations de récurrence linéaires à coefficients constants, de la forme

$$y_{n+q} + \dots + b_1 y_{n+1} + b_0 y_0 = a_p u_{n+p} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

avec $p \leq q$.

Fonction de transfert. Notons $\{h_n\}$ la réponse impulsionnelle d'un système linéaire et invariant par le temps. La sortie associée au signal d'entrée $\{u_n^p\} = \{u_p \delta_{n-p}\}$ est $\{y_n^p\} = \{u_p h_{n-p}\}$. $H(z)$ désignant la transformée en z de la réponse impulsionnelle, la transformée de cette sortie est $Y^p(z) = u_p z^{-p} H(z)$. Comme l'entrée $\{u_n\}$ est la somme de toutes les signaux $\{u_n^p\}$ la sortie associée à pour transformée en z la fonction $Y(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} u_p z^{-p} H(z)$. En résumé

Propriété 2 Les transformées en z des signaux $\{u_n\}$, $\{h_n\}$ et $\{y_n\}$ satisfaisant

$$\{y_n\} = \{h_n\} * \{u_n\} \quad (18)$$

sont reliées par

$$Y(z) = H(z)U(z) \quad (19)$$

La fonction $H(z)$ est appelée **fonction de transfert** du système.

EXEMPLE. Considérons le système discret du second ordre caractérisé par

$$\begin{cases} y_{n+2} = y_n + u_n, & n \geq 0 \\ y_0 = \lambda_0, y_1 = \lambda_1 \end{cases} \quad (20)$$

Prolongeons les signaux $\{u_n\}$ et $\{y_n\}$ par 0 pour $n < 0$. On se convaincra qu'alors, on a

$$y_{n+2} = y_n + u_n + \lambda_1 \delta_{n-1} + \lambda_2 \delta_{n-2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et donc

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - 1} U(z) + \frac{\lambda_1 z^{-1} + \lambda_2 z^{-2}}{z^2 - 1}$$

Dans le cas où le système est initialement au repos ($y_0 = y_1 = 0$), le système satisfait pour tout n la relation $y_{n+2} = y_n + u_n$ et peut être décrit par un opérateur de convolution. La relation entre entrée et sortie est alors linéaire ; dans le domaine en z , on a

$$Y(z) = H(z)U(z) \quad \text{avec} \quad H(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

1.3 Représentation fréquentielle des signaux à temps discret

La démarche sous-jacente à la définition du **spectre** d'un signal à temps discret est analogue à celle qui nous a conduit à la transformée de Fourier d'un signal à temps continu. Il s'agit de construire une fonction $\hat{x}(\omega)$ qui permette de recomposer le signal temporel comme superposition d'exponentielles complexes, donc une fonction telle que

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega n} d\omega, \quad n \in \mathbb{N}$$

(le facteur $1/2\pi$ simplifiera ultérieurement l'expression du spectre du signal). Mais cette égalité ne permet pas de définir uniquement $\hat{x}(\omega)$. Les suites $\{e^{i\omega n}\}$ et $\{e^{i(\omega+\Delta\omega)n}\}$ sont égales lorsque $\Delta\omega$ est un multiple de 2π , par conséquent, deux fonctions $f(\omega)$ et $g(\omega)$ définissent le même signal temporel $\{x_n\}$ si

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\omega + 2k\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\omega + 2k\pi)$$

Pour lever cette ambiguïté, on définit le spectre de $\{x_n\}$ comme la seule fonction du paramètre réel ω , périodique de période 2π telle que

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{x}(\omega) e^{i\omega n} d\omega, \quad n \in \mathbb{N} \quad (21)$$

La valeur x_n est donc le coefficient de Fourier du spectre $\hat{x}(\omega)$, et par conséquent, son expression explicite est donnée par

$$\hat{x}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-i\omega n} = X(e^{i\omega}) \quad (22)$$

Le spectre d'un signal discret se déduit donc très simplement de sa transformée en z .

1.4 Stabilité entrée/sortie des systèmes à temps discret

Les critères permettant de déterminer si les signaux discrets sont ou non bornés, évanescents, si les systèmes sont stables, etc. présentent une ressemblance frappante avec les énoncés s'appliquant aux systèmes continus. Il suffit de remplacer la transformée de Laplace par la transformée en z et de remplacer le domaine de stabilité en temps continu

$$\text{Demi-plan droit ouvert : } \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) < 0\}$$

par son équivalent en temps discret

$$\text{Disque unitaire ouvert : } \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \quad (23)$$

Un signal est **rationnel** si sa transformée en z prend la forme d'une fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$. Si le signal est causal, alors $\deg(P) \leq \deg(Q)$.

Propriété 3 Un signal rationnel et causal est borné si et seulement si

- Tous ses pôles sont de module inférieur ou égal à 1.
- Les éventuels pôles de module 1 sont simples.

Il est évanescent (il a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$) si et seulement si

- Tous ses pôles sont de module strictement plus petit que 1.

Formellement, la définition et la caractérisation de la stabilité externe (ou entrée/sortie) d'un système restent inchangées.

Définition 1 - Stabilité entrée-sortie. Un système linéaire est **stable** si tout signal d'entrée borné engendre une sortie bornée. Un système est **instable** s'il n'est pas stable.

Définition 2 Un nombre complexe z est **stable** si son module est strictement plus petit que 1, **instable** sinon.

Propriété 4 Un système linéaire de fonction de transfert rationnelle $H(z)$ est stable si et seulement

- (Critère en z) - **Tous ses pôles sont stables.**
ou bien, ce qui est équivalent
- (Critère en temporel) - **Sa réponse impulsionnelle est sommable :**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n| < +\infty \quad (24)$$

2 Représentation interne. Modèle d'état

On appelle **modèle d'état** d'un système à temps discret tout système d'équations de récurrence de la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, u_n) \\ y_n = g(x_n, u_n) \end{cases} \quad (25)$$

assorti de conditions initiales x_0 . Un tel modèle est linéaire si les fonctions f et g le sont ; il prend alors la forme standard

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \\ y_n = Cx_n + Du_n \end{cases} \quad (26)$$

2.1 Stabilité Interne

Définition 3 Stabilité interne (systèmes linéaires). Un système à temps discret linéaire autonome d'état $x \in \mathbb{R}^n$ est

- **stable** si pour toute condition initiale x_0 , la trajectoire $\{x_n\}$ de l'état est bornée.
- **asymptotiquement stable** (ou a. stable en abrégé) si pour toute condition initiale x_0 , la trajectoire $\{x_n\}$ de l'état est évanescente.

- **instable** s'il n'est pas stable.

La caractérisation effective de la stabilité de tels systèmes fait à nouveau appel aux **pôles** du système discret, c'est-à-dire aux valeurs propres de la matrice de la dynamique A .

Propriété 5 Le système linéaire autonome de dynamique

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (27)$$

- est **stable** si

$$\forall \lambda \in \sigma(A), |\lambda| < 1 \text{ et si } |\lambda| = 1, \nu(\lambda) \leq 1 \quad (28)$$

- est **a. stable** si

$$\forall \lambda \in \sigma(A), |\lambda| < 1 \quad (29)$$

2.2 Commandabilité

Considérons le système d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et d'entrée $u \in \mathbb{R}^m$ dont la dynamique est donnée par

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \quad (30)$$

Les notions d'états accessibles, de système commandable, se transposent sans difficulté du cas continu au cas discret : un état x de ce système est **accessible** s'il existe une commande $\{u_n\}$ et un instant N tels que $x_0 = 0$ et $x_N = x$. On note \mathcal{R} ou $\mathcal{R}(A, B)$ l'ensemble de tous les états accessibles. Le système (30) est **commandable** si tous les états x de \mathbb{R}^n sont accessibles.

Le critère de commandabilité de Kalman pour les systèmes à temps discret est formellement le même que pour les systèmes à temps continu : appelons **matrice de commandabilité** du système la matrice

$$\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (31)$$

alors

Propriété 6 - Critère de commandabilité de Kalman. L'espace atteignable du système (30) se confond avec l'image de la matrice de commandabilité

$$\mathcal{R}(A, B) = \text{Im } \mathcal{C} \quad (32)$$

En particulier, le système est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est de rang n .

2.3 Retour d'état et placement de pôles

La problématique de la stabilisation par retour d'état est identique en temps continu et en temps discret. Il s'agit maintenant de déterminer si l'on peut trouver une matrice K telle que la loi de commande

$$u_n = -Kx_n \quad (33)$$

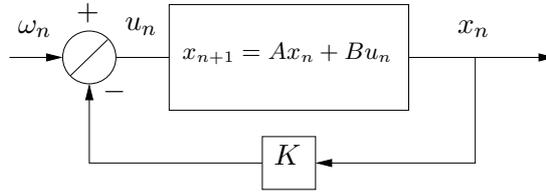


Figure 3: Rétroaction portant sur l'état complet du système.

stabilise le système $x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$. La dynamique du système bouclé prend la forme

$$x_{n+1} = (A - BK)x_n \quad (34)$$

Comme dans le cas à temps continu, le problème est résolu si l'on sait placer arbitrairement les pôles du système bouclé, c'est-à-dire les valeurs propres de $A - BK$: il suffira de les placer dans le disque ouvert de rayon 1. Or nous savons qu'il est possible de placer arbitrairement ces pôles si et seulement si la matrice de commandabilité \mathcal{C} du système $\dot{x} = Ax + Bu$ est de rang maximal. Cette condition est satisfaite si et seulement si le système à temps discret $x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$ est commandable (cf. propriété 6). Par conséquent, comme dans le cas continu,

Propriété 7 Il est possible de placer arbitrairement les pôles d'un système bouclé par feedback d'état si le système en boucle ouverte est commandable.

2.4 Observabilité

Considérons le système d'entrée $u \in \mathbb{R}^m$, d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et de sortie $y \in \mathbb{R}^p$ caractérisé par les équations standard

$$\begin{cases} x_{n+1} &= Ax_n + Bu_n \\ y_n &= Cx_n + Du_n \end{cases} \quad (35)$$

Deux vecteurs d'état x^1 et x^2 du système sont **discernables** s'il existe une commande $\{u_n\}$ telle que les signaux de sorties $\{y_n^1\}$ et $\{y_n^2\}$, solutions du système (30) lorsque $x_0 = x^1$ et $x_0 = x^2$ soient différents. Dans le cas contraire, ils sont **indiscernables**. Le système sera dit **observable** si tous les états distincts du système sont discernables.

Notons \mathcal{I} l'ensemble des états indiscernables de 0. Ce sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n peut être déterminé à partir de la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Propriété 8 - Critère d'observabilité de Kalman. L'espace des états discernables de 0 du système (35) se confond avec le noyau de la matrice d'observabilité

$$\mathcal{I}(A, B) = \text{Ker } \mathcal{O} \quad (37)$$

Le système est donc observable si et seulement si la matrice d'observabilité est de rang n .

2.5 Structure Observateur-Commandeur

Comme dans le cas continu, l'utilisation d'observateurs permet de pallier à une mesure partielle y_n de l'état x_n du système. Pour estimer à partir de la connaissance de $\{u_n\}$ et de $\{y_n\}$ la valeur de l'état inconnu $\{x_n\}$ du système

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \\ y_n = Cx_n + Du_n \end{cases} \quad (38)$$

on propose d'utiliser une structure de la forme

$$\begin{cases} \hat{x}_{n+1} = A\hat{x}_n + Bu_n + L(y_n - \hat{y}_n) \\ \hat{y}_n = C\hat{x}_n + Du_n \end{cases} \quad (39)$$

le gain L restant à déterminer ; on cherche à choisir cette matrice de telle sorte que l'estimation soit asymptotiquement exacte, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation e_n soit évanescente

$$e_n = x_n - \hat{x}_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \quad (40)$$

On souhaite également être plus précis et pouvoir contrôler la vitesse à laquelle cette estimation tend vers 0. La dynamique de l'erreur e_n est donnée par

$$e_{n+1} = (A - LC)e_n \quad (41)$$

et par conséquent, le problème se résume à nouveau à placer les pôles de $A - LC$, opération que l'on pourra effectuer si le système discret est observable.

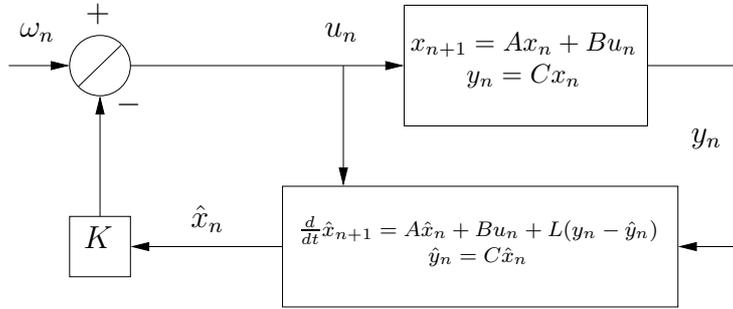


Figure 4: Structure observateur-commandeur

L'ensemble observateur-commandeur et système initial représenté sur la figure 4 évolue selon les équations

$$\begin{cases} x_{n+1} = (A - BK)x_n + BK e_n \\ e_{n+1} = (A - LC)e_n \end{cases} \quad (42)$$

Les pôles de cette dynamique sont les valeurs propres de $A - BK$ et ceux de $A - LC$; le système bouclé sera donc asymptotiquement stable si la dynamique de la commande par retour d'état et de l'observateur sont asymptotiquement stables.

3 Connexion entre temps discret et temps continu

3.1 Convertisseurs Numériques/Analogiques.

Un convertisseur numérique-analogique est un système hybride dont l'entrée est un signal discret et la sortie est un signal à temps continu. Il est le plus souvent utilisé comme un dispositif d'approximation : la sortie $x(t)$ doit reproduire le plus fidèlement les caractéristiques du signal d'entrée $\{x_n\}$.

La plupart des convertisseurs sont

- **Linéaires** : si les entrées discrètes $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ génèrent respectivement les sorties $x(t)$ et $y(t)$, alors à toute entrée de la forme $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ correspond la sortie $\lambda x(t) + \mu y(t)$.
- **Invariants dans le temps** : si un signal $\{x_n\}$ est converti en $x(t)$, alors le même signal décalé dans le temps (en avance ou en retard) va engendrer la sortie $x(t)$ décalée de la même façon.

Ces deux hypothèses simplifient considérablement l'étude des convertisseurs. Elles permettent en effet de représenter le comportement du convertisseur au moyen d'une des données suivantes

- **sa réponse impulsionnelle** : c'est la sortie $h(t)$ correspondant à l'impulsion unitaire $\{\delta_n\}$ en entrée.
- **sa fonction de transfert** $H(s)$: c'est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$.
- **sa réponse fréquentielle**, donnée par $H(i\omega)$.

Pour une entrée quelconque $\{x_n\}$ le signal de sortie $x(t)$ associé vérifie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n h(t - nT) \quad (43)$$

$X_z(z)$ désignant la transformée en z du signal $\{x_n\}$ et $X_s(s)$ la transformée de Laplace de $x(t)$, on a

$$X_s(s) = H(s)X_z(e^{sT}) \quad (44)$$

C'est bien sûr cette relation qui motive l'appellation fonction de transfert pour $H(s)$. La fonction $s \mapsto X_z(e^{sT})$ est appelée transformée étoile de $\{x_n\}$. Contrairement à la transformée en z , elle tient compte de l'intervalle de temps T séparant les valeurs de $\{x_n\}$. On notera \mathcal{L}^* l'opérateur associé à cette transformation

$$\mathcal{L}^*[x_n](s) = \mathfrak{Z}[x_n](e^{sT}) \quad (45)$$

Enfin, on a également la relation fréquentielle suivante

$$X_s(i\omega) = H(i\omega)X_z(e^{i\omega T}) \quad (46)$$

La transformée de Fourier de $x(t)$ est donc directement reliée au spectre du signal d'entrée $\{x_n\}$. Plus précisément, la valeur de $X(i\omega)$ ne dépend que du système et du contenu fréquentiel de $\{x_n\}$ à la pulsation réduite ωT . Pour

cette raison, il est courant que l'on appelle spectre de $\{x_n\}$ la fonction $2\pi/T$ périodique

$$\omega \mapsto X_z(e^{i\omega T}) \quad (47)$$

dont on pourra représenter le graphe entre $-\pi/T$ et π/T ou 0 et π/T . Ce changement de définition se traduit simplement par un changement d'échelle en ω .

EXEMPLE - LE BLOQUEUR D'ORDRE 0 (*zero-order hold*) - I. C'est, et de loin, le convertisseur N/A le plus utilisé. Son principe est simple : prendre comme valeur courante en sortie la dernière valeur reçue en entrée. Lorsque les valeurs x_n parviennent toutes les T secondes au convertisseur, on a donc

$$x(t) = x_n \text{ pour tout } t \in [nT, (n+1)T[\quad (48)$$

Le terme ordre 0 fait référence à la classe des fonctions interpolant le signal discret : ce sont des fonctions constantes par morceaux ; on parle de bloqueur d'ordre 1 (resp. 2) lorsque l'interpolation est affine (resp. réalisée avec des polynômes d'ordre 2).

Ce système est bien linéaire et invariant dans le temps. Sa réponse impulsionnelle est le créneau $c(t)$ d'amplitude 1 entre $t = 0$ et $t = T$ et nul ailleurs. Ce créneau est relié à la fonction échelon par la relation $c(t) = e(t) - e(t - T)$ par conséquent, dans le domaine de Laplace et en fréquentiel, on a

$$C(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \text{ et } C(i\omega) = Te^{-i\frac{\omega T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (49)$$

EXEMPLE - LE BLOQUEUR HARMONIQUE IDÉAL. Nous recherchons un bloqueur tel que le contenu fréquentiel du signal soit préservé par l'opération de conversion. Il y a toutefois une ambiguïté fondamentale à lever car une sinusoïde pure de la forme

$$x_n = A \sin(\omega_0 nT)$$

peut aussi s'écrire

$$x_n = A \sin(\omega_k nT), \quad \omega_k = \omega_0 + \frac{2k\pi}{T}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, il est impossible de distinguer si le signal continu sous-jacent est bien de pulsation ω_0 plutôt que de pulsation $\omega_0 + 2\pi/T$, $\omega_0 + 4\pi/T$, etc. La démarche la plus raisonnable par défaut consiste à associer au signal discret

$$e^{i\omega_0 nT}, \text{ de spectre } \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - \omega_0)$$

l'exponentielle complexe de plus petite fréquence parmi les fréquences admissibles, c'est-à-dire le signal

$$e^{i\omega_0 nt}, \text{ de spectre } 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Appliquer cette démarche à chaque composante fréquentielle du signal discret revient à construire le signal continu $x(t)$ de spectre

$$X_s(i\omega) = \begin{cases} TX_z(e^{i\omega T}) & \text{si } |\omega| \leq \pi/T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (50)$$

ce qui, en introduisant la fonction caractéristique χ_B de la bande de pulsation $B = [-\pi/T, \pi/T]$

$$\chi_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \pi/T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (51)$$

se réécrit sous la forme multiplicative

$$X_s(i\omega) = T\chi_B(\omega)X_z(e^{i\omega T}) \quad (52)$$

Le bloqueur harmonique parfait est donc caractérisé par la fonction de transfert $H(i\omega) = T\chi_B(i\omega)$. Sa réponse impulsionnelle peut être déterminée au moyen de la formule d'inversion de Fourier :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T\chi_B(i\omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

Un calcul immédiat nous donne

$$h(t) = T \operatorname{sinc}((2\pi/T)t) = \begin{cases} T \frac{\sin((2\pi/T)t)}{(2\pi/T)t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (53)$$

EXERCICE - CONVERTISSEURS N/A ET SCHÉMAS D'INTERPOLATION. Un convertisseur N/A réalise une interpolation du signal d'entrée $\{x_n\}$ si la sortie $x(t)$ vérifie $x(nT) = x_n$ pour tout n . Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la réponse impulsionnelle d'un convertisseur pour qu'il soit un interpolateur. Est-ce le cas du bloqueur harmonique idéal ?

EXEMPLE - UN BLOQUEUR ABSTRAIT. En temps continu, le système dont la fonction de transfert est 1 a une sortie $y(t)$ identique à l'entrée $u(t)$. Mais comment se comporte un convertisseur N/A de fonction de transfert 1 ? La réponse est la suivante : ce bloqueur associe à l'impulsion à temps discret $\{\delta_n\}$ la mesure de Dirac $\delta(t)$, ou de façon plus générale

$$\{x_n\} \mapsto x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta(t - nT) \quad (54)$$

L'intérêt de ce bloqueur est avant tout théorique : il permet de plonger les signaux discrets dans l'ensemble des signaux continus et de rendre homogène le traitement de ces deux types de signaux.

3.2 Convertisseurs Analogiques/Numériques.

Le coeur de tout convertisseur A/N est un échantillonneur, c'est-à-dire un système qui lit la valeur du signal continu $x(t)$ en entrée toutes les T secondes et donne la valeur correspondante en sortie. Il associe donc au signal continu $x(t)$ le signal discret de valeurs $x_n = x(nT)$.

Alors que cette opération s'exprime très simplement sur les représentations temporelles des signaux, son effet sur le contenu fréquentiel est plus complexe.

Notons $x(t)$ le signal d'entrée de l'échantillonneur et $\{x_n\}$ le signal de sortie. Le spectre du signal de sortie peut être mis sous la forme

$$X_z(e^{i\omega T}) = \frac{1}{T} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T x(nT) e^{-i\omega nT} \right]$$

On reconnaît entre crochet une somme de Riemann de pas T associée à la fonction $f(t) = x(t)e^{-i\omega t}$. La grandeur entre crochet est donc une approximation du spectre du signal continu

$$X_s(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} d\omega$$

et donc

$$X_z(e^{i\omega T}) \simeq \frac{1}{T} X_s(i\omega) \quad (55)$$

Cette relation met en rapport de façon très simple les contenus fréquentiels d'un signal continu et du signal échantillonné correspondant ; elle fournit une nouvelle raison de définir le spectre d'un signal discret par la formule (22). Mais il ne faut pas oublier que cette formule est approximative ; elle constitue une bonne approximation lorsque les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

- La période d'échantillonnage T est petite devant le temps qu'il faut au signal $x(t)$ pour changer sensiblement de valeur.
- La pulsation réduite ωT vérifie $|\omega T| \leq \pi$.

La formule exacte est donnée par

$$X_z(e^{i\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_s(i(\omega + \phi_k)), \quad \phi_k = (2\pi/T)k \quad (56)$$

Cette relation est peu utilisée en automatique, du fait de sa complexité. Toutefois, il existe une méthode systématique et simple pour déterminer de façon exacte le spectre d'un signal échantillonné lorsque la transformée de Laplace du signal continu est une fraction rationnelle. Mettons cela en évidence sur un exemple.

EXEMPLE - ECHANTILLONNAGE ET TRANSFORMÉES. Le signal continu de transformée de Laplace $X(s) = 1/(s + a)$ ($a \in \mathbb{C}$) a pour représentation temporelle

$$x(t) = e(t) e^{-at}$$

Par conséquent, un échantillonnage à la période T produit le signal $x_n = e(nT) e^{-anT} = e(n) (e^{-aT})^n$ dont la transformée en z est donnée par

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (57)$$

De la même façon, le signal $X(s) = 1/(s + a)^2$, déterminé par

$$x(t) = e(t) t e^{-at}$$

génère après échantillonnage $x_n = e(n)nT(e^{-aT})^n$ et sa transformée en z vaut donc

$$X(z) = \frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} \quad (58)$$

△

Pour éviter que les différentes composantes fréquentielles du signal continu d'interfèrent par la formule (56), on fait souvent précéder l'échantillonnage d'un filtrage passe-bas afin d'éliminer tous les termes sauf un dans cette somme. C'est souvent la succession du filtrage puis de l'échantillonnage qui constitue le convertisseur A/N.

3.3 Conversion systèmes continus/systèmes discrets

La plupart des schémas permettant de passer d'un système continu à un système discret "équivalent" supposent le choix de convertisseurs N/A et A/N qui sont intercalés en entrée et en sortie du système continu comme représenté en figure 6 pour former un système discret.

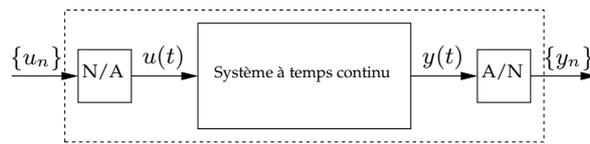


Figure 5: Conversion système à temps continu/système à temps discret

3.3.1 Discrétisé exact.

Les choix les plus courants de l'automaticien sont le bloqueur d'ordre 0 comme convertisseur N/A et l'échantillonneur pur comme convertisseur A/N. Le système discret alors obtenu est appelé **discrétisé exact** du système initial. Sa détermination passe par l'utilisation d'un modèle d'état du système initial : si son entrée $u(t)$ et sa sortie $y(t)$ sont reliées par les relations

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (59)$$

alors les suites u_n et y_n vérifient

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_d x_n + B_d u_n \\ y_n = C_d x_n + D_d u_n \end{cases} \quad (60)$$

avec

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{At} B dt, \quad C_d = C, \quad D_d = D \quad (61)$$

EXEMPLE - APPROXIMATION D'UN DOUBLE INTÉGRATEUR - I. Ce système, de fonction de transfert $H(s) = 1/s^2$, peut être représenté par le modèle d'état sous forme standard

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (62)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0] \quad (63)$$

Déterminons l'évolution du discrétisé exact de ce système, caractérisé par les équations

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_d x_n + B_d u_n \\ y_n = C_d x_n \end{cases} \quad (64)$$

L'utilisation des formules (61) mène à

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}, C_d = [1 \quad 0] \quad (65)$$

Un calcul direct sur le système de récurrence (64) donne la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} \quad (66)$$

3.3.2 Invariance de la réponse impulsionnelle.

Remplaçons le bloqueur d'ordre 0 par le convertisseur de fonction de transfert 1 ; le système discret ainsi obtenu vérifie la propriété d'**invariance de la réponse impulsionnelle** : la réponse impulsionnelle du système discret est l'échantillonnée de la réponse impulsionnelle du système continu.

La détermination de la fonction de transfert du système discret dans ce schéma se fait à partir des tables de transformées : on déduit de la fonction de transfert $H(s)$ du système continu la forme de la réponse impulsionnelle $h(t)$ au moyen des tables de transformée de Laplace, puis on détermine la transformée en z de la suite $h_n = h(nT)$ qui est la fonction de transfert $H(z)$ recherchée.

EXEMPLE - APPROXIMATION D'UN DOUBLE INTÉGRATEUR - II. La démarche à mener correspond à l'exemple de la section 3.2 dans le cas particulier $a = 0$. Par conséquent, nous obtenons

$$H(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (67)$$

3.3.3 Schémas de conversions locaux - substitutions

Un moyen alternatif de définir un système discret équivalent à un système continu est de le décomposer en sous-systèmes élémentaires interconnectés, puis de calculer le système équivalent à chaque sous-système. Le système équivalent global est alors défini à partir des sous-systèmes équivalents en conservant le même schéma de connexion.

Le système élémentaire choisi est le plus souvent l'intégrateur ; on sait en effet qu'il est toujours possible de réaliser un système linéaire au moyen d'intégrateurs et de gains statiques interconnectés. Les blocs de conversion N/A et A/N peuvent varier.

EXEMPLE - Considérons le filtre du premier ordre de fonction de transfert $H(s) = 1/(s + 1)$. En écrivant cette expression sous la forme

$$H(s) = \frac{1/s}{1 + 1 \times 1/s} = \frac{P(s)}{1 + K(s)P(s)} \text{ avec } P(s) = \frac{1}{s}, K(s) = 1$$

on met en évidence que le système peut être représenté par un intégrateur auquel est appliqué un retour d'état unitaire.

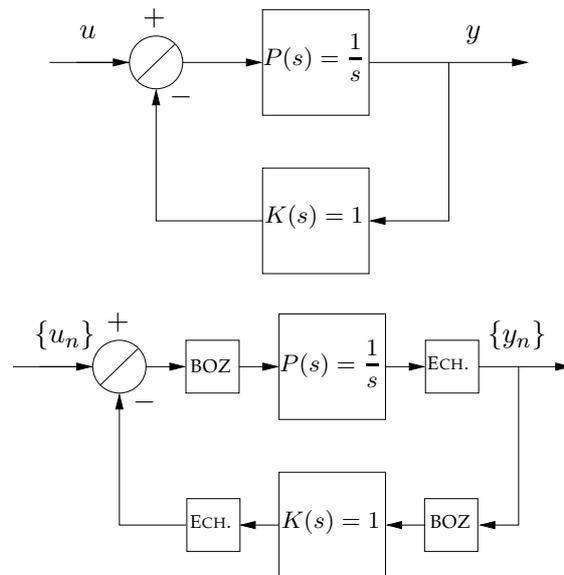


Figure 6: Conversion système à temps continu/systeme à temps discret

Adoptons pour les deux blocs apparaissant sur la figure ci-dessus le schéma de discrétisation exacte. La fonction de transfert du bloc "gain unitaire" est inchangée par ce processus : $K(s) = 1$ correspond à $K_z(z) = 1$. L'intégrateur $P(s)$ est équivalent au système de fonction de transfert $P_z(z) = T/(z - 1)$. Par conséquent, la fonction de transfert équivalente au système global est donnée par

$$H_z(z) = \frac{P_z(z)}{1 + K_z(z)P_z(z)} = \frac{T/(z - 1)}{1 + 1 \times T/(z - 1)} = \frac{T}{z + T - 1} \quad (68)$$

△

Règle des rectangles - Schéma d'Euler. L'exemple précédent met en évidence la simplicité de la détermination du système discret équivalent : il suffit de mettre la fonction de transfert sous la forme d'une fraction rationnelle en $1/s$ puis de substituer $T/(z - 1)$ à chaque occurrence de $1/s$. Cette correspondance a été déterminée en apposant à chaque entrée d'intégrateur un bloqueur d'ordre 0. Le calcul de l'intégral est donc réalisé en supposant que les données déterminent une fonction constante par morceaux : c'est le schéma d'intégration numérique appelé **méthodes des rectangles**.

On peut bien sûr travailler directement sur la fraction rationnelle en s qu'est $H(s)$ en utilisant la correspondance

$$s \equiv \frac{z-1}{T} \quad (69)$$

Cette remarque nous suggère une autre interprétation ; formellement, chaque opérateur de différentiation utilisé dans la définition du système continu est approché par la différence finie suivante

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=nT} \equiv \frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T} \quad (70)$$

Il s'agit de l'approximation d'Euler pour le calcul d'une dérivée.

Règle des trapèzes - Schéma de Tutsin. Ce schéma est très proche du précédent. Seule change l'approximation faite pour le calcul de l'intégrale : on utilise désormais comme convertisseur N/A un bloqueur d'ordre 1 qui interpole les données discrètes linéairement avant que ne soit réalisée l'intégration. En sortie, on réalise à nouveau un échantillonnage standard.

La contribution du signal $u(t)$ en sortie du bloqueur à l'intégrale lorsque $t \in [nT, (n+1)T]$ est donnée par $T(u_{n+1} + u_n)/2$. Par conséquent, en sortie de l'échantillonneur, on a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{T}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

La fonction de transfert de $\{u_n\}$ à $\{y_n\}$, et donc la valeur correspondant à $1/s$ est donnée par

$$\frac{1}{s} \equiv \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad (71)$$

Ce schéma est encore appelé transformation bilinéaire.

EXEMPLE - APPROXIMATION D'UN DOUBLE INTÉGRATEUR - III. Dans le schéma de Tutsin, à la fonction de transfert $H(s) = 1/s^2$ correspond l'équivalent discret

$$H_z(z) = \frac{T^2}{4} \left[\frac{z+1}{z-1} \right]^2 \quad (72)$$