

# Automatique et Calcul de Fourier-Laplace

S. Boisgérault, ISIA

15 octobre 2002



P.-S. Laplace (1749-1827)

Pierre-Simon Laplace était un mathématicien prolifique dont les contributions majeures concernent les équations aux différences, les équations différentielles, l'astronomie et la théorie des probabilités.

Membre de l'Académie des sciences, il se considérait comme le meilleur mathématicien de son époque en France ... et le faisait savoir ! Le fait qu'il eût probablement raison ne contribuait que modérément à apaiser ses collègues.

THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE

URL: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/>

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Calcul de Fourier-Laplace. Approche élémentaire</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Calcul de Fourier-Laplace des fonctions</b>	<b>3</b>
2.1	Convolution . . . . .	4
2.2	Transformation de Fourier-Laplace . . . . .	4
2.2.1	Transformée de Fourier . . . . .	4
2.2.2	Transformée de Laplace . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Distributions</b>	<b>5</b>
3.1	Des fonctions aux distributions . . . . .	5
3.2	Distributions - définitions . . . . .	6
3.3	Opérations sur les distributions . . . . .	6
3.3.1	La dérivation . . . . .	7
3.3.2	Autres opérations usuelles . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Calcul de Fourier-Laplace des distributions</b>	<b>8</b>
4.1	Transformée de Fourier de fonctions à croissance lente. . . . .	8
4.2	Transformée de Fourier de distributions à croissance lente. . . . .	8
4.3	Transformation de Laplace . . . . .	9
4.4	Convolution de distributions . . . . .	9

<b>5</b>	<b>Système linéaires et convolutions</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Gestion des conditions initiales</b>	<b>14</b>
6.1	Dérivations et formule des sauts . . . . .	14
6.2	Analyse du problème de Cauchy. . . . .	14
<b>7</b>	<b>Signaux causaux et rationnels.</b>	<b>15</b>
7.1	Tables de transformées . . . . .	15
7.2	Inversion de la transformée de Laplace. . . . .	16

## 1 Calcul de Fourier-Laplace. Approche élémentaire

Considérons le système différentiel linéaire

$$q_n y^{(n)} + \dots + q_1 \dot{y} + q_0 y = p_m u^{(m)} + \dots + p_1 \dot{u} + p_0 u \quad (1)$$

qui relie les deux signaux scalaires  $u$  et  $y$ . L'étape centrale de l'analyse harmonique du système (1) consiste à rechercher parmi les sorties associées à une entrée sinusoïdale de la forme

$$u(t) = A_u \sin(\omega t + \phi_u), \quad A_u \in \mathbb{R}_+, \quad \phi_u \in \mathbb{R} \quad (2)$$

quelles sont les solutions sinusoïdales de même pulsation  $\omega$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \phi_y), \quad A_y \in \mathbb{R}_+, \quad \phi_y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

La façon la plus simple de répondre à cette question passe par la notation phaseur (ou notation complexe): tout signal sinusoïdal  $x(t) = A_x \sin(\omega t + \phi_x)$  est caractérisé par son amplitude  $A_x$  et sa phase  $\phi_x$  ou bien de façon équivalente par son **phaseur**  $x_\phi$  défini par

$$x_\phi = A_x e^{i\phi_x} \in \mathbb{C} \quad (4)$$

On montre alors qu'à toute entrée sinusoïdale  $u$  correspond une unique sortie sinusoïdale de même pulsation et que leur phaseurs des signaux  $u$  et  $y$  sont reliés par

$$\frac{y_\phi}{u_\phi} = H(i\omega) \quad (5)$$

où  $H(s)$  est la fraction rationnelle appelée **fonction de transfert du système**, définie par (1)

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \left| \begin{array}{l} P(s) = p_m s^m + \dots + p_1 s + p_0 \\ Q(s) = q_n s^n + \dots + q_1 s + q_0 \end{array} \right. \quad (6)$$

## 2 Calcul de Fourier-Laplace des fonctions

Dans cette section, nous introduisons les opérations sur les signaux qui sont centrales dans le calcul de Fourier-Laplace. Ces opérations ne sont définies que sous un certain nombre de conditions. Ces hypothèses sont de deux natures uniquement: elles imposent soit un certain degré de régularité sur le signal, soit une limitation sur la vitesse de croissance des signaux au voisinage de  $t = \pm\infty$ .

Comme nous généraliserons ces définitions et propriétés à une classe très générale de signaux dans la section 4, nous pouvons dans un premier temps nous limiter à des signaux dont les propriétés sont très favorables, tant du point de vue de la régularité que de la croissance à  $t = \pm\infty$ . Nous supposons donc dans cette section que tous les signaux temporels que nous manipulons sont indéfiniment différentiables et de support compact<sup>1</sup>. Sous cette

1. Le support  $\text{supp}(f)$  d'un signal temporel  $f$  est l'adhérence de  $f^{-1}(\{0\})$

$$\text{supp}(f) = \overline{\{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}} \quad (7)$$

hypothèse, toutes les opérations que nous considérerons dans cette section sont bien définies.

## 2.1 Convolution

La convolution de deux signaux temporels  $f$  et  $g$  est le signal temporel défini par

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (8)$$

L'opération de convolution est commutative et bilinéaire.

## 2.2 Transformation de Fourier-Laplace

### 2.2.1 Transformée de Fourier

**Définition.** La transformée de Fourier d'un signal temporel  $f$  à valeurs complexes est la fonction de la pulsation  $\omega$  et à valeurs complexes  $\mathcal{F}f$

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \text{ et } \mathcal{F}f : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{F}f(\omega) \in \mathbb{C} \quad (9)$$

définie par

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (10)$$

**Inversion.** La fonction  $\mathcal{F}f$  est d'autant plus régulière que  $f$  décroît rapidement en  $t = \pm\infty$ . De plus, elle décroît d'autant plus vite en  $\omega = \pm\infty$  que  $f$  est régulière. En particulier, sous les hypothèses de régularité et de décroissance faites sur  $f$ , sa transformée de Fourier est indéfiniment différentiable et décroît, au voisinage de  $\omega = \pm\infty$ , plus vite que toute puissance de  $1/|\omega|$ . La transformée de Fourier est une opération injective : la formule d'inversion suivante permet de retrouver la fonction  $f$  à partir de sa transformée de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (11)$$

On notera le caractère analogue de la transformation de Fourier et de la transformation inverse. Ces deux opérations sont déduites l'une de l'autre par la relation

$$\overline{\mathcal{F}^{-1}f} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\bar{f} \quad (12)$$

**Propriétés.** La transformation de Fourier est une opération linéaire. De plus, son utilité dans l'analyse des systèmes dynamiques linéaires provient de ses propriétés relatives à la dérivation et à la convolution des signaux

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}f\right)(\omega) = (i\omega)\mathcal{F}f(\omega) \text{ et } \mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}f(\omega)\mathcal{F}g(\omega) \quad (13)$$

---

Le signal  $f$  est donc de support compact si ses valeurs  $f(t)$  sont nulles lorsque  $|t|$  est assez grand.

## 2.2.2 Transformée de Laplace

**Définition.** La transformée de Laplace d'un signal temporel  $f$  est la fonction de la variable complexe  $s$  à valeurs complexes  $\mathcal{L}f$

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \text{ et } \mathcal{L}f : s \in \mathbb{C} \mapsto \mathcal{L}f(s) \in \mathbb{C} \quad (14)$$

définie par

$$\mathcal{L}f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-st} dt \quad (15)$$

**Laplace et Fourier.** Les transformée de Laplace et de Fourier sont intimement liées puisque pour tout signal temporel  $f$ , on a

$$\mathcal{F}f(\omega) = \mathcal{L}f(i\omega) \text{ et } \mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\omega) \quad (16)$$

**Propriétés.** Plusieurs propriétés de la transformée de Laplace se déduisent directement de celles de la transformée de Fourier. En particulier, pour tout  $\sigma \in \mathbb{R}$ , on a la formule d'inversion de Bromwich

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}f(\sigma + i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega \quad (17)$$

et les propriétés

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f\right)(s) = s\mathcal{L}f(s) \text{ et } \mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s) \quad (18)$$

## 3 Distributions

### 3.1 Des fonctions aux distributions

Considérer une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  en tant que distribution, c'est renoncer à sa description à travers ses valeurs ponctuelles  $f(t)$ , pour la caractériser uniquement à travers l'opérateur intégral

$$\phi \mapsto \langle f, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t) dt \quad (19)$$

les fonctions  $\phi$  décrivant l'ensemble des fonctions à valeurs complexes qui sont indéfiniment différentiables et de support compact. Une telle fonction sera par la suite désignée par le terme de fonction test.

**Fonctions admissibles.** Presque toutes les fonctions définissent des distributions : pour que la formule (19) soit bien définie, il suffit que la fonction  $f$  soit localement sommable, c'est-à-dire que pour toute valeur des réels  $a$  et  $b$ , l'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt \quad (20)$$

soit un réel bien défini. La classe de fonctions localement sommables est très vaste. Tout d'abord, comme cette propriété a un caractère local, elle n'impose

aucune restriction sur le comportement du signal en  $t = \pm\infty$ . Si elle suppose une certaine forme de régularité, elle est toutefois très limitée : toute fonction continue par morceau est par exemple localement sommable. La restriction la plus sérieuse concerne en fait la présence de pôles : les fonctions  $f(t) = 1/t^\alpha$  pour  $\alpha \geq 1$  ne sont par exemple pas localement sommables au voisinage de 0. Mais même ce type de restriction peut parfois être contourné au prix d'un peu de technique supplémentaire.

**En quoi une distribution définit une fonction.** L'opération qui à une fonction localement sommable associe sa distribution par la relation (19) est-elle inversible? Peut-on à partir de la seule connaissance de l'opérateur  $\phi \mapsto \langle f, \phi \rangle$  retrouver de façon unique les valeurs de la fonction  $f$ ?

On peut en fait retrouver *presque toutes* les valeurs  $f(t)$  : deux fonctions  $f$  et  $g$  définissent la même distribution si et seulement si l'ensemble des  $t$  où elles diffèrent est de mesure<sup>2</sup> nulle, donc en particulier si elles ne diffèrent que pour un nombre fini ou dénombrable de valeurs. En particulier, pour manipuler une fonction de  $t$  uniquement comme une distribution, il est inutile de fournir toutes ses valeurs : l'échelon  $e(t)$  vérifiant

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (21)$$

caractérise une unique distribution bien que sa valeur soit inconnue pour  $t = 0$ .

### 3.2 Distributions - définitions

Un opérateur  $f$ , défini pour toute fonction test  $\phi$

$$\phi \mapsto \langle f, \phi \rangle \in \mathbb{C} \quad (22)$$

définit une distribution s'il est linéaire et continu par rapport à  $\phi$ . La continuité est à prendre au sens suivant : si une famille  $\phi_i$  de fonctions test ont leur support contenu dans un compact fixe et si toute dérivée  $\frac{d^n}{dt^n} \phi_i$  converge uniformément vers la dérivée correspondante  $\frac{d^n}{dt^n} \phi$  de la fonction test  $\phi$ , alors  $\langle f, \phi_i \rangle$  converge vers  $\langle f, \phi \rangle$ .

L'exemple le plus classique de distribution qui n'est pas une fonction est la mesure de Dirac, ou impulsion, centrée en  $t = 0$ , notée  $\delta$  et définie par

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) \quad (23)$$

### 3.3 Opérations sur les distributions

Pour que l'espace des distributions soit utile, il est nécessaire d'y définir un calcul : de donner un sens à la notion de somme de distributions, de dérivée

---

2. La mesure de Lebesgue  $\mu(A)$  d'un ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  fournit une évaluation de la longueur de l'ensemble. Pour tout  $a$  et  $b$  réels, tels que  $a \leq b$ , on a naturellement  $\mu([a, b]) = b - a$ . Dans le cas d'un ensemble quelconque  $A$ , on peut évaluer sa mesure en procédant à des estimations supérieures de plus en plus fines : si les intervalles  $[a_i, b_i]$ ,  $i \in \mathbb{N}$  recouvrent  $A$ , c'est-à-dire si  $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i]$  alors il est raisonnable d'exiger que  $\mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i - a_i$ . On détermine complètement  $\mu(A)$  en sélectionnant la plus grande valeur satisfaisant cette inégalité pour tous les recouvrements possibles de  $A$ .

de distribution, etc. Il est également nécessaire que ce calcul soit compatible avec le calcul des fonctions, c'est-à-dire que ces opérations prolongent aux distributions les opérations usuelles sur les fonctions. La démarche générale est illustrée dans la section suivante sur la définition de l'opérateur de dérivation, qui peut être appliqué à toute distribution.

### 3.3.1 La dérivation

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continument différentiable. Les signaux  $f$  et  $\dot{f}$  définissent des distributions. Soit  $\phi$  une fonction test. Comme par intégration par parties, pour tout  $T > 0$ , on a

$$\int_{-T}^{+T} \dot{f}(t)\phi(t) dt = f(T)\phi(T) - f(-T)\phi(-T) - \int_{-T}^{+T} f(t)\dot{\phi}(t) dt$$

et que  $\phi$  est à support compact, par passage à la limite sur  $T$ , nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} \dot{f}(t)\phi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t)\dot{\phi}(t) dt$$

Pour toute fonction  $f$  continument différentiable et toute fonction test  $\phi$ , on a donc

$$\langle \dot{f}, \phi \rangle = - \langle f, \dot{\phi} \rangle \quad (24)$$

Cette relation suggère une façon de définir l'opération de dérivation pour toute distribution  $f$ . En effet, pour toute distribution  $f$ , la valeur complexe du second membre de (24) dépend linéairement et continument de toute fonction test  $\phi$ . C'est donc une distribution. On peut donc définir pour toute distribution  $f$  une distribution dérivée par la relation

$$\langle \dot{f}, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} - \langle f, \dot{\phi} \rangle \quad (25)$$

Cette définition de la dérivée d'une distribution prolonge de façon cohérente la définition de la dérivation des fonctions continument différentiables. Elle fait également de la distribution une opération linéaire et continue de l'espace des distributions dans lui-même. C'est même la seule définition possible satisfaisant ces deux propriétés.

### 3.3.2 Autres opérations usuelles

Par une démarche analogue à celle de la section précédente, il est possible de prolonger la plupart des opérations usuelles des fonctions aux distributions. Pour simplifier certaines des expressions qui suivent, nous noterons parfois  $f(t)$  la distribution  $f$ ;  $f(t)$  ne désigne pas la valeur ponctuelle de  $f$  en un certain  $t$  de  $\mathbb{R}$ , valeur qui dans le cas général n'existe pas.

La somme de deux distributions est définie sans restriction par

$$\langle f + g, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle \quad (26)$$

La multiplication de deux distributions n'est pas définie dans le cas général. Par contre, on peut toujours définir le produit d'une distribution  $f$  par une fonction indéfiniment différentiable  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\langle \lambda(t)f(t), \phi(t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(t), \lambda(t)\phi(t) \rangle \quad (27)$$

La conjugaison de toute distribution  $f$  est définie par

$$\langle \overline{f}, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\langle f, \overline{\phi} \rangle} \quad (28)$$

Pour toute distribution  $f$  et tout réel  $T$ , on peut définir la distribution en retard de  $T$  (ou en avance de  $-T$ ) par

$$\langle f(t - T), \phi(t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(t), \phi(t + T) \rangle \quad (29)$$

La définition de la convolution de signaux distributions ainsi que de la transformées de Fourier et de Laplace des distributions font l'objet des sections suivantes.

## 4 Calcul de Fourier-Laplace des distributions

### 4.1 Transformée de Fourier de fonctions à croissance lente.

La formule (10) qui définit la transformée de Fourier n'a de sens que lorsque la fonction  $f$  est sommable. Il est toutefois possible de définir la transformée de fonctions non sommables si l'on accepte que les transformées soient non plus des fonctions mais des distributions. Dans ce contexte, définir  $\mathcal{F}f$ , c'est donner une valeur, pour toute fonction test  $\phi$ , à l'expression  $\langle \mathcal{F}f, \phi \rangle$  et vérifier que cette expression définit bien une distribution.

Or, lorsque  $f$  est sommable,  $\mathcal{F}f$  est une fonction, et on a la relation suivante

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega)\phi(\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathcal{F}\phi(t) dt \quad (30)$$

Il n'est pas nécessaire que  $f$  soit sommable pour que le second membre de cette équation soit défini. La fonction  $\phi(\omega)$  étant indéfiniment différentiable et à support compact, sa transformée de Fourier décroît, au voisinage de  $t = \pm\infty$ , plus vite que toute puissance de  $1/|t|$ . Il en est de même de toutes ses dérivées : la fonction est dite *indéfiniment différentiable à décroissance rapide*.

Il suffit donc pour que l'expression soit définie que la croissance de la fonction  $f$  soit dominée, au voisinage de  $t = \pm\infty$ , par un polynôme en  $t$ . On admettra que sous cette condition, l'expression ainsi définie est bien une distribution. Pour toute fonction  $f$  à croissance lente, en posant

$$\langle \mathcal{F}f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathcal{F}\phi(t) dt \quad (31)$$

nous étendons donc la définition classique de la transformée de Fourier.

### 4.2 Transformée de Fourier de distributions à croissance lente.

Il est possible d'aller plus loin et de d'étendre la transformée de Fourier à certaines distributions. Il est clair d'après ce qui précède qu'il ne sera pas possible d'étendre cette définition à toute distribution puisque nous n'avons pas réussi à étendre cette définition aux fonctions dont la croissance est trop rapide à l'infini.



Techniquement, l'opération tentante qui consisterait à définir pour toute distribution  $f$

$$\langle \mathcal{F}f, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mathcal{F}\phi \rangle \quad (32)$$

présente un défaut : la fonction  $\mathcal{F}\phi$  n'est pas nécessairement à support compact et par conséquent le second membre de (32) n'est pas défini.

Pour lever le problème, il faut imposer à la distribution  $f$  une contrainte de croissance analogue à celle imposée aux fonctions : la distribution sera alors dite tempérée ou à croissance lente. Pour imposer une contrainte de croissance à la distribution, on considère sa convolution avec toutes les fonctions tests possibles (cf section 4.4). Cette opération a un effet régularisant : le signal résultant est toujours une fonction indéfiniment différentiable. Il suffit alors d'imposer à toutes ces fonctions d'être des fonctions à croissance lente : en bref, nous exigeons que pour toute fonction test  $\pi$ , la fonction convoluée  $f * \pi$  soit dominée, au voisinage de  $t = \pm\infty$ , par un polynôme en  $t$ .

Il est possible, pour toute distribution tempérée  $f$ , de définir par un procédé limite le produit  $\langle f, \phi \rangle$  pour toute fonction test  $\phi$  indéfiniment différentiable à décroissance rapide. La formule (32) définit donc la distribution  $\mathcal{F}f$  pour toute distribution tempérée  $f$ .

Il est possible de prouver que la distribution  $\mathcal{F}f$  est elle-même tempérée. Précisément, la transformation de Fourier est une bijection de l'ensemble des distributions tempérées de variable  $t$  sur l'ensemble des distributions tempérées de variable  $\omega$ . L'application réciproque  $\mathcal{F}^{-1}$  est donnée par la relation

$$\overline{\mathcal{F}^{-1}f} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\bar{f} \quad (33)$$

### 4.3 Transformation de Laplace

La limite de la transformée de Fourier, c'est la contrainte de croissance lente imposée aux distributions, contrainte qui exclue par exemple de l'analyse les signaux divergeant exponentiellement en  $t = +\infty$ , donc les réponses des systèmes linéaires exponentiellement instables. La transformée de Laplace permet dans certains cas de pallier à ces limitations.

La définition de la transformée de Laplace d'une distribution est inspirée de la seconde formule de (16). Soit  $\sigma \in \mathbb{R}$ ; si  $f(t)e^{-\sigma t}$  est une fonction à croissance lente, on peut définir la distribution de variable  $\omega$  notée  $\mathcal{L}_\sigma f(\omega)$  ou abusivement  $\mathcal{L}f(\sigma + i\omega)$  par

$$\mathcal{L}f(\sigma + i\omega) = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] \quad (34)$$

### 4.4 Convolution de distributions

Considérons l'expression classique de la convolution de deux fonctions du temps  $f$  et  $g$

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (35)$$

Supposons dans un premier temps les signaux continus. Le membre de droite de (35) est défini si l'une des fonctions est de support compact. Il l'est également si  $f$  est dominé par un polynôme en  $t = \pm\infty$  et que  $g$  décroît plus vite que toute puissance de  $1/|t|$  en  $t = \pm\infty$ , alors leur convolution est bien définie. Enfin, si

$f$  et  $g$  sont des fonctions causales, c'est-à-dire que leur support est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ , c'est encore le cas.

Dans le cas des distributions, la situation n'est guère différente. Nous ne définirons pas explicitement l'expression de la convolution de distributions, ce qui nécessiterait trop de technique supplémentaire, mais nous la caractérisons à travers le calcul opérationnel. Notons simplement à ce stade que la convolution des distributions  $f$  et  $g$  est bien définie dans les 3 cas suivants :

- 1)  $f$  est quelconque et  $g$  est de support compact.
- 2)  $f$  est une distribution à croissance lente et  $g$  une distribution à décroissance rapide: pour toute fonction test  $\pi$ , la fonction  $f * \pi$  est dominée par un polynôme en  $t = \pm\infty$  et  $g * \pi$  décroît en  $t = \pm\infty$  plus vite que toute puissance de  $1/|t|$ .
- 3)  $f$  et  $g$  sont causales: leur support est inclu dans  $\mathbb{R}_+$ .

Dans le cas 2), les transformations de Fourier de  $f$  et  $g$  existent toutes les deux:  $\mathcal{F}f$  est une distribution à croissance lente et  $\mathcal{F}g$  est une fonction indéfiniment différentiable. Leur produit est donc bien défini et la relation suivante est valide

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \quad (36)$$

Dans le cas 3), si de plus les deux distributions sont dominées par une exponentielle en  $t = +\infty$ , c'est-à-dire si on peut trouver  $\sigma^* > 0$  tel que pour toute fonction test  $\pi$ ,  $f * \pi$  et  $g * \pi$  soient dominées par  $Ke^{\sigma^* t}$  pour  $t$  assez grand, on peut appliquer la transformation de Laplace. Pour tout  $\sigma > \sigma^*$ ,  $f(t)e^{-\sigma t}$  et  $g(t)e^{-\sigma t}$  sont à décroissance rapide et par conséquent, les transformées de Laplace  $\mathcal{L}_\sigma f$  et  $\mathcal{L}_\sigma g$  sont des fonctions indéfiniment différentiables de  $\omega$ . La relation suivante est alors satisfaite

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s), \Re(s) > \sigma^* \quad (37)$$

## 5 Système linéaires et convolutions

Considérons le système linéaire sous forme standard

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (38)$$

$$\text{avec } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p \quad (39)$$

La solution générale du système (38), assorti de la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  est de la forme

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) dt \quad (40)$$

En particulier, la composante  $y_j(t)$  de la sortie  $y(t)$  est donnée par

$$y_j(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^{+\infty} h_j^i(t-\tau)u_i(\tau) dt \quad (41)$$

où les vecteurs  $h^i$  vérifient

$$[h^1(t), \dots, h^m(t)] \stackrel{\text{def}}{=} e(t)Ce^{At}B \quad (42)$$

( $e(t)$  désignant l'échelon unitaire, qui vaut 1 pour  $t > 0$ , 0 sinon). La relation entre  $u$  et  $y$  se résume parfois uniquement à la convolution suivante

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^p \int_{-\infty}^{+\infty} h_j^i(t-\tau)u_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^p (h_j^i * u_i)(t) \quad (43)$$

C'est le cas lorsque le système est actif depuis  $t_0 = -\infty$  et initialement au repos. C'est également le cas si le système est au repos en  $t_0 = 0$  et que, par convention, on prolonge par 0 tous les signaux pour  $t < 0$ . Pour certaines gammes de signaux d'entrée  $u$ , on pourra caractériser cette convolution au moyen de la transformation de Fourier-Laplace (cf. section 4.4). Les transformées de Laplace  $U_i(s)$  et  $Y_j(s)$  de  $u_i$  et  $y_j$  respectivement sont reliées par

$$Y(s) = H(s)U(s), \quad \text{où } H_{ij}(s) = \mathcal{L}h_j^i(s) \quad (44)$$

La matrice  $H(s)$  est la **fonction de transfert** ou **matrice de transfert** entre les signaux  $u$  et  $y$ . Dans le cas où entrée et sortie sont scalaires,  $h(t)$  est la sortie du système correspondant à un dirac  $\delta(t)$  en entrée : dans le cas scalaire, la fonction de transfert est donc la transformée de Laplace de la **réponse impulsionnelle**.

EXEMPLE. Le système scalaire du premier ordre, d'entrée  $u$  et de sortie  $y$  scalaires, de dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases} \quad (45)$$

a pour fonction de transfert  $H(s) = 1/(s+1)$ . Si maintenant la sortie n'est plus le scalaire  $x$  mais le couple  $y = (x, u)$ , elle devient

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Enfin, si l'on tient désormais compte de la perturbation  $b$ , qui intervient dans la dynamique du système par les relations

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u + z \\ \dot{z} = b \\ y = (x, u) \end{cases} \quad (47)$$

on obtient dans le domaine de Laplace les relations

$$\begin{cases} sX(s) = -X(s) + U(s) + Z(s) \\ sZ(s) = B(s) \\ Y(s) = (X(s), U(s)) \end{cases} \quad (48)$$

soit après élimination de la variable  $Z(s)$

$$\begin{cases} X(s) = \frac{1}{s+1} \times U(s) + \frac{1}{s(s+1)} \times B(s) \\ U(s) = 1 \times U(s) + 0 \times B(s) \end{cases} \quad (49)$$

la fonction de transfert entre  $(u, b)$  et  $y = (x, u)$  devient donc

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

La donnée de la fonction de transfert d'un système constitue une alternative à la description d'un système différentiel.

La fonction de transfert peut être considérée comme une représentation de la dynamique du système dans le domaine de Laplace. On ne s'étonnera donc pas de voir que les automaticiens utilisent indifféremment la représentation temporelle ou dans le domaine de Laplace.

EXEMPLES. SYSTÈMES USUELS. Considérons le **gain statique**  $K \in \mathbb{R}$  qui relie à chaque instant les signaux  $u$  et  $y$  par la relation

$$y = Ku \quad (51)$$

Bien entendu, cette relation devient  $Y = KU$  dans le domaine de Laplace. Aussi, le diagramme de la figure 2 peut être interprété dans le domaine temporel ou de Laplace, et désigne le même système. Si les signaux  $u$  et/ou  $y$  sont

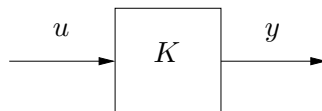


FIG. 1 – Représentation en bloc d'un gain statique  $K$ .

vectoriels, la démarche précédente reste valable et  $K$  désigne alors une matrice

à coefficients constants dont le nombre de lignes et de colonnes sont déterminés par la taille de  $u$  et  $y$ .

Un système **intégrateur** est caractérisé par la dynamique  $\dot{y} = u$  : la sortie  $y$  est alors une primitive de l'entrée. Sa fonction de transfert est  $H(s) = 1/s$ . A l'inverse, un **dérivateur** est caractérisé par la dynamique  $y = \dot{u}$  et sa fonction de transfert est  $H(s) = s$ .

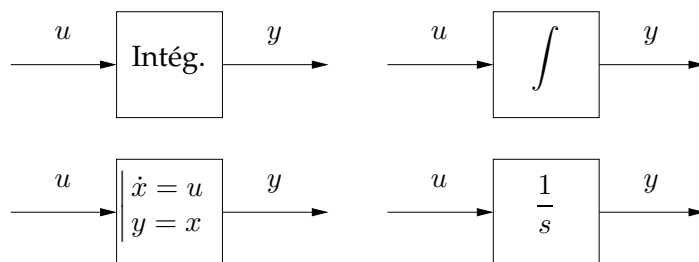


FIG. 2 – Quelques représentations équivalentes d'un intégrateur.

A la description de la dynamique d'un système par une liste d'équations, on peut également préférer une représentation graphique par **diagramme de blocs**. C'est par exemple la façon naturelle dont on définit les systèmes avec le logiciel SIMULINK.

Un système élémentaire est alors représenté par un rectangle, ainsi qu'une ou plusieurs flèches entrantes représentant les **signaux d'entrée** (*inputs*) et une ou plusieurs flèches sortantes, les **signaux de sortie** (*outputs*). Le système est identifié d'une façon ou d'une autre : liste d'équation, fonction de transfert, ou bien par un schéma caractéristique d'un type de dynamique (saturation, *deadzone*), etc.

- Connectant l'entrée sur un signal déjà présent.
- Ajoutant (ou soustrayant) la sortie à un signal déjà présent.

En particulier les schémas de la figure 3

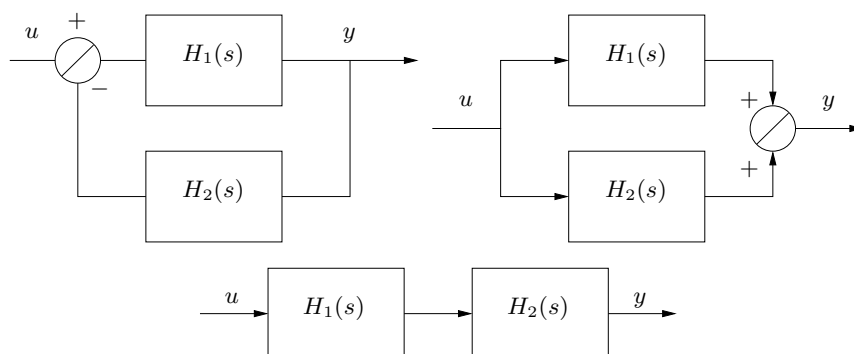


FIG. 3 – Montages série (en bas), parallèle (en haut à droite) et rétroaction négative (en haut à gauche).

sont appelés **mise en parallèle** et **mise en série** des systèmes 1 et 2, et **bouclage (négatif)** ou **rétroaction (négative)** du système 1 par le système 2. Les

fonctions de transfert des systèmes résultants sont données par

Combinaison	Fonction de transfert
Parallèle	$H_1(s) + H_2(s)$
Série	$H_2(s)H_1(s)$
Rétroaction	$[I + H_1(s)H_2(s)]^{-1}H_1(s)$

On notera que lorsque les systèmes considérés sont vectoriels, les valeurs de  $H_1(s)H_2(s)$  et de  $H_2(s)H_1(s)$  peuvent être différentes puisque le produit matriciel n'est pas commutatif.

## 6 Gestion des conditions initiales

### 6.1 Dérivations et formule des sauts

La dérivée d'une distribution  $x$ , que l'on notera simplement

$$\dot{x} \text{ ou } \frac{dx}{dt} \quad (52)$$

coïncide, lorsque le signal est continûment différentiable, avec la fonction obtenue par la dérivation ponctuelle

$$\dot{x}^p(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (53)$$

Par contre, lorsque le signal présente un nombre fini ou dénombrable de discontinuités aux points  $t_n$ , bien que la fonction  $\dot{x}^p$  soit définie presque partout et définisse une distribution, elle ne coïncide pas avec la dérivée "au sens des distributions" de  $x$ . La relation exacte tient compte des sauts du signal aux points de discontinuités  $t_n$

$$\Delta_n = \lim_{h \rightarrow 0} x(t_n + h) - x(t_n - h) \quad (54)$$

par la relation

$$\dot{x} = \dot{x}^p + \sum_n \Delta_n \delta(t - t_n) \quad (55)$$

appelée formule des sauts. L'utilisation de la formule des sauts montre que la mesure de Dirac en 0 peut être obtenue comme dérivée de la fonction échelon unitaire  $e$  :

$$\delta = \dot{e} \text{ où } e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (56)$$

En effet, la dérivée ponctuelle de  $e$  est bien définie et nulle pour tout  $t \neq 0$  et au seul point de discontinuité, en  $t = 0$ , le saut de  $e$  vaut  $\Delta = 1$ .

### 6.2 Analyse du problème de Cauchy.

L'utilisation des distributions offre une méthode pour analyser, toujours au moyen de la transformation de Laplace, les systèmes d'équations différentielles avec des conditions initiales a priori non nulles. Considérons par exemple la dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \text{ pour } t \geq 0 \\ x(0) = a, \dot{x}(0) = b \end{cases} \quad (57)$$

Si l'on suppose les signaux  $u$  et  $x$  nuls pour  $t < 0$ , l'équation  $\ddot{x}(t) = u(t)$  est encore satisfaite pour  $t < 0$ , donc

$$\ddot{x}^p = u \text{ presque partout} \quad (58)$$

En appliquant la formule (55), on obtient successivement  $\dot{x} = \dot{x}^p + a\delta$  et  $\ddot{x} = \ddot{x}^p + b\delta + a\dot{\delta}$  soit, en utilisant (58)

$$\ddot{x} = u + a\dot{\delta} + b\delta \quad (59)$$

En appliquant alors la transformation de Laplace à cette relation on trouve

$$s^2 X(s) = U(s) + as + b, \text{ soit } X(s) = \frac{1}{s^2}U(s) + \frac{1}{s}a + \frac{1}{s^2}b \quad (60)$$

## 7 Signaux causaux et rationnels.

### 7.1 Tables de transformées

Nous sommes désormais en mesure de déterminer les tables de transformation de Laplace pour tout signal causal (nul pour  $t < 0$ ) et rationnel (dont la transformée de Laplace est une fraction rationnelle).

Signal temporel $x(t)$	Transformée de Laplace $X(s)$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t}e(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^n}$
$e^{\lambda t} \cos(\omega t)e(t)$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t} \sin(\omega t)e(t)$	$\frac{\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}$

FIG. 4 – Table compacte de transformées de Laplace.

Montrons à titre d'exemple comment est établie la table 4.

EXEMPLE. Posons

$$x_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t}e(t) \text{ et } X_n = \mathcal{L}[x_n]$$

Comme  $x_1(t) = e^{\lambda t}e(t)$ , on a  $\dot{x}_1(t) = \lambda e^{\lambda t}e(t) + \delta(t) = \lambda x_1(t) + \delta(t)$ , et par conséquent

$$X_1(s) = \frac{1}{s-\lambda}$$

Admettons l'expression de  $X_n$  de la table 4 vraie jusqu'à l'ordre  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}(t) &= \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t}e(t) + \lambda \frac{1}{n!}t^n e^{\lambda t}e(t) \\ &= x_n(t) + \lambda x_{n+1}(t) \end{aligned}$$

et par conséquent, on a

$$X_{n+1}(s) = \frac{1}{s - \lambda} X_n(s) = \frac{1}{(s - \lambda)^n}$$

ce qui achève la récurrence.

EXEMPLE. Posons

$$c(t) = e^{\lambda t} \cos(\omega t) e(t) \text{ et } s(t) = e^{\lambda t} \sin(\omega t) e(t)$$

Leurs transformées de Laplace peuvent être calculées en utilisant les expressions du cosinus et du sinus sous forme d'exponentielles complexes puis l'expression de la transformée déjà calculée. On préfère ici travailler directement avec les équations différentielles : par dérivation on obtient successivement

$$\dot{c}(t) = \lambda c(t) - \omega s(t) + \delta(t), \quad \dot{s}(t) = \lambda s(t) + \omega c(t)$$

ce qui se traduit dans le domaine de Laplace par

$$C(s) = -\frac{\omega}{s - \lambda} + \frac{1}{s - \lambda}, \quad S(s) = \frac{\omega}{s - \lambda}$$

relations dont on déduit

$$C(s) = \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2} \text{ et } S(s) = \frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2} \quad (61)$$

## 7.2 Inversion de la transformée de Laplace.

La méthode permettant de retrouver l'expression temporelle d'un signal à partir de sa transformée de Laplace est systématique lorsque cette dernière est une fraction rationnelle strictement causale, c'est-à-dire dont le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. En effet, toute expression de la forme

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_n s^n + \dots + p_1 s + p_0}{q_m s^m + \dots + q_1 s + q_0}, \quad n < m \quad (62)$$

peut être décomposée en éléments simples. Si  $Q(s)$  se factorise en

$$Q(s) = \prod_{\lambda} (s - \lambda)^{n_{\lambda}} \quad (63)$$

alors on peut décomposer  $X(s)$  sous la forme

$$X(s) = \sum_{\lambda} \sum_{n=1}^{n_{\lambda}} \frac{C_{\lambda,n}}{(s - \lambda)^n} \quad (64)$$

Par linéarité et en utilisant la table 4, on trouve donc que

$$x(t) = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(t) e^{\lambda t}, \quad \text{avec } P_{\lambda}(t) = \sum_{n=1}^{n_{\lambda}} \frac{C_{\lambda,n}}{(n-1)!} t^{n-1} \quad (65)$$



Le point central est donc le calcul des coefficients  $C_{\lambda,n}$  de la décomposition en éléments simples. On ne reviendra pas en détail sur cette méthode classique. Contentons nous de rappeler que

– Si  $\lambda$  est un pôle d'ordre 1 de  $X(s)$ , alors

$$C_{\lambda,1} = \lim_{s \rightarrow \lambda} [(s - \lambda)X(s)] \quad (66)$$

– Si  $\lambda$  est un pôle d'ordre  $n_\lambda$  de  $X(s)$ , alors pour tout  $k \in \{1, n_\lambda\}$

$$C_{\lambda,k} = \lim_{s \rightarrow \lambda} \left[ \frac{1}{(n_\lambda - k)!} \frac{d^{n_\lambda - k}}{ds^{n_\lambda - k}} (s - \lambda)^{n_\lambda} X(s) \right] \quad (67)$$

EXEMPLE. Considérons la fraction rationnelle

$$X(s) = \frac{s^3}{s^2 - 1} \quad (68)$$

La division euclidienne de  $s^3$  par  $s^2 - 1$  donne

$$s^3 = s(s^2 - 1) + s \quad (69)$$

Par conséquent, on a

$$X(s) = s + Y(s) \text{ avec } Y(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$$

Les racines de  $s^2 - 1$  sont simples : ce sont 1 et  $-1$ . Pour la fraction rationnelle  $Y$ , strictement causale, on a

$$C_{1,1} = \frac{s}{(s+1)} \Big|_{s=1} = \frac{1}{2} \text{ et } C_{-1,1} = \frac{s}{(s-1)} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent,

$$X(s) = s + \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1}$$

et donc

$$x(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$$